1 (Se) représenter le mieux possible le graphe des fonctions suivantes :
1) $(x,y) \longmapsto x^y$. **2)** $(x,y) \longmapsto x-y+2$.
3) $(x,y) \longmapsto \sin(x+y)$. **4)** $(x,y) \longmapsto x\,e^{-y^2}$.
4) $(x,y) \longmapsto e^{-xy^2}$. **5)** $(x,y) \longmapsto e^{-x}\cos y$.

TOPOLOGIE DE $\mathbb{R}^2$, LIMITES ET CONTINUITÉ

2 Montrer proprement que les exemples d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ donnés en cours sont bien des ouverts.

3 Étudier, éventuellement en passant en coordonnées polaires, la limite lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$ de :
1) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **2)** $\dfrac{xy}{x^2-y^2}$. **3)** $\dfrac{e^{xy}-1}{x}$.
4) $\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$. **5)** $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

4 Montrer que l'application $(x,y) \longmapsto \dfrac{\sin\left(x^2+y\right)}{\sqrt{1+x^2\,e^y}}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

5 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On note Δ la droite de $\mathbb{R}^2$ d'équation $y=x$ et on pose pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} & \text{si } x\neq y\\ f'(x) & \text{si } x=y.\end{cases}$$
1) Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$.
2) a) Vérifier que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
$$\varphi(x,y)=\int_0^1 f'\big((1-t)x+ty\big)\,dt.$$
b) En déduire que φ est continue sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

DÉRIVÉES PARTIELLES

6 Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes : **1)** $(x,y) \longmapsto x^y$.
2) $(x,y) \longmapsto \operatorname{Arctan}\dfrac{y}{x}$. **3)** $(x,y) \longmapsto \dfrac{e^{xy}}{x+y}$.

7 Soit $f \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\big)$.
1) On pose $\varphi(t)=f\left(e^t, t+\dfrac{1}{t}\right)$ pour tout $t\in\mathbb{R}^*$. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.
2) On pose ensuite $\psi(u,v)=f(u+v,uv)$ pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer son gradient.

8 Soit $f \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\big)$.
1) Calculer la dérivée de $x \longmapsto f\big(x, f(x,x)\big)$.
2) Calculer les dérivées partielles de $(x,y) \longmapsto f(y,x)$ et $(x,y) \longmapsto f\big(x, f(x,y)\big)$.

9 Soit $f \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle pour tous $x,y,z\in\mathbb{R}$: $f\big(x^2+y, yz\big)=x f(y,z)$. Dériver cette relation par rapport aux trois variables x, y et z.

10
1) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ et $A\in\Omega$. Déterminer un vecteur normal au plan tangent de f en A.
2) On note f la fonction $(x,y) \longmapsto e^{x+y}(x-y+1)$ sur $\mathbb{R}^2$.
a) Déterminer l'équation du plan tangent de f en $(0,0)$.
b) La fonction f possède-t-elle un plan tangent parallèle au plan d'équation $x=y+z$?

11 Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $f(x,y)=\displaystyle\int_{x^2}^{xy}\varphi$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.

12 Soit $f \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $t>0$: $f(tx,ty)=t f(x,y)$. Calculer les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ et en déduire que f est linéaire.

13
1) On pose pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{y} & \text{si } y\neq 0\\ x & \text{si } y=0.\end{cases}$$
Montrer que f est dérivable dans toutes les directions en $(0,0)$ mais qu'elle n'y est pas continue.
2) Même question avec :
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

14 On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ est *homogène de degré* $\alpha\in\mathbb{R}$ si pour tous $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda>0$:
$$f(\lambda x,\lambda y)=\lambda^\alpha f(x,y).$$

1) ◷ Montrer que les dérivées partielles d'une fonction homogène de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ sont aussi homogènes.

2) ◷◷ Soient $f \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\big)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si :

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f.$$

---

15 ◷◷ Soit $f \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\big)$. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $f(x+t,y+t) = f(x,y)$ pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$.

---

16 ◷◷ Soit $\varphi \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}\big)$ pour lesquelles pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \varphi(y).$$

---

17 ◷◷ Résoudre au moyen d'un passage en coordonnées polaires les équations aux dérivées partielles suivantes d'inconnue $f \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R},\mathbb{R}\big)$:

1) $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$ **2)** $x\,\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\,\dfrac{\partial f}{\partial x} = f.$

---

18 ◷◷ Dans cet exercice, l'inconnue f est de classe $\mathscr{C}^1$.

1) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$, grâce au changement de variables $(u,v) = (x+y,x-y)$, l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = f$ avec la condition aux limites $f(x,0) = \sin x$.

2) Résoudre sur $\mathbb{R}^2$, grâce au changement de variables $(x,y) = \left(u, \dfrac{u^2}{2} + v\right)$, l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = x + y$ avec la condition aux limites $f(0,y) = y$.

3) Résoudre sur $\big(\mathbb{R}_+^*\big)^2$, grâce au changement de variables $(x,y) = \left(\dfrac{u}{v}, \dfrac{v^2}{u}\right)$, l'équation aux dérivées partielles $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} = y\,\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

4) ◷◷◷ Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} - e^x\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1$ au moyen d'un changement de variables adapté.

---

19 ◷◷◷ On pose $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$.

1) Soit $(x,y) \in \Omega$ de coordonnées polaires (r,θ) avec $r > 0$.

a) Redémontrer que $\theta \equiv \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x}\ [2\pi]$ si $x > 0$ et $\theta \equiv \pi + \operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x}\ [2\pi]$ si $x < 0$.

b) Prouver un résultat analogue en fonction de $\operatorname{Arctan} \dfrac{x}{y}$ dans les cas $y > 0$ et $y < 0$.

2) Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 2π-périodique.

a) Pourquoi peut-on poser $\widehat{\varphi}(x,y) = \varphi(\theta)$ pour tout $(x,y) \in \Omega$ de coordonnées polaires (r,θ) avec $r > 0$?

b) Montrer que $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω et que :

$$x\,\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial x} + y\,\frac{\partial \widehat{\varphi}}{\partial y} = 0.$$

3) Soit $a \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$. Résoudre au moyen d'un passage en coordonnées polaires l'équation aux dérivées partielles $x\,\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\,\dfrac{\partial f}{\partial y} = a\big(\sqrt{x^2+y^2}\big)$ d'inconnue $f \in \mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$.

EXTREMA LOCAUX

20 Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1) ◷ $(x,y) \longmapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$.

2) ◷ $(x,y) \longmapsto 5x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 2y$.

3) ◷◷ $(x,y) \longmapsto x^3 + y^2 - 2xy$.

4) ◷◷ $(x,y) \longmapsto x^3 + y^3 - 3xy$.

5) ◷◷ $(x,y) \longmapsto e^{x \sin y}$.

---

21 ◷◷ On note f la fonction :

$$(x,y) \longmapsto \sin x \sin y \sin(x+y) \qquad \text{sur } \mathbb{R}^2.$$

1) Pourquoi f possède-t-elle une borne supérieure S sur $\mathbb{R}^2$?

2) Étudier le signe de f sur le carré $[0,\pi]^2$. En quel(s) point(s) s'y annule-t-elle ?

3) Représenter graphiquement l'ensemble :

$$\mathscr{E} = \Big\{(x,y) \in \big(\mathbb{R}_+^*\big)^2 \ \Big|\ \ x+y < \pi\Big\}.$$

4) Montrer que S est la borne supérieure de f sur $\mathscr{E}$. On pourra commencer par simplifier $f(x+\pi,y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

5) On **ADMET** dans cette question que f possède un maximum dans $\mathscr{E}$. Montrer que $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

6) ◷◷◷ Montrer que f possède un maximum dans $\mathscr{E}$. On pourra s'intéresser à une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathscr{E}$ pour laquelle $\lim\limits_{n\to+\infty} f(M_n) = S$.

---

22 ◷◷◷ Soit ABC un triangle du plan. Montrer que la fonction $M \longmapsto MA^2 + MB^2 + MC^2$ possède un minimum et que celui-ci est atteint en un unique point.
