1 FONCTIONS DÉFINIES EXPLICITEMENT

1 On note f l'application $n \longmapsto 2n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ et g l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g. Que vaut $g \circ f$? Que faut-il en retenir ?

---

2 On note f l'application $n \longmapsto n+1$ sur $\mathbb{N}$ et g l'application $n \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{N}$. Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$ mais que ni f ni g n'est bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Que faut-il en retenir ?

3

1) Montrer que la fonction tangente hyperbolique est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque.
2) Même question avec la fonction sinus hyperbolique de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
3) Même question avec la fonction cosinus hyperbolique de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.

4

1) Déterminer l'image de la fonction $x \longmapsto xe^x$ et l'image réciproque de $\mathbb{R}_-$ par cette fonction.
2) Déterminer l'image de la fonction $x \longmapsto x^n \ln x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3) On note f la fonction $x \longmapsto \sin \dfrac{\pi}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $f\big(]0,1]\big)$ et $f^{-1}\big(\{0\}\big)$.
4) Déterminer l'image de $]-2,4]$ et l'image réciproque de $[-1,2]$ par $x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$.
5) Déterminer l'image de $x \longmapsto \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$ et l'image réciproque de $[-2,0]$ par cette fonction.
6) Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^3+1}$ est bijective de $[-1,+\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer sa réciproque.
7) Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-4x+8}$ est bijective de $[2,+\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer sa réciproque.
8) Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{\ln \dfrac{x+1}{x-1}}$ est bijective de $]1,+\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer sa réciproque.
9) On note f la fonction $x \longmapsto x^2+4x+1$ sur $\mathbb{R}$.
   a) Sur quels intervalles (les plus grands possible) f est-elle injective ? Déterminer, sur chacun de ces domaines I, la réciproque de $f|_I$.
   b) Déterminer $f\big([-3,0]\big)$, $f^{-1}\big([0,1[\big)$, $f^{-1}\big(\{-1\}\big)$ et $f^{-1}\big(\{-4\}\big)$.
10) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
    a) Déterminer l'image de f.
    b) Montrer que f est injective sur $[-1,1]$ et déterminer $\left(f|_{[-1,1]}\right)^{-1}$.
    c) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{4},1\right]\right)$.
11) On note f la fonction $x \longmapsto x\ln x + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
    a) Sur quels intervalles (les plus grands possible) f est-elle injective ?
    b) Déterminer $f\left(\left[\dfrac{1}{2},+\infty\right[\right)$.

---

5 Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que $z \longmapsto \dfrac{z+\omega}{\overline{\omega}z+1}$ est bijective de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

---

6 On note I l'application $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

1) Montrer que I est bijective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$ et déterminer sa réciproque.
2) a) Montrer que l'image par I d'un cercle de centre 0 est un cercle. Quelle est l'image de $\mathbb{U}$ en particulier ?
   b) Plus généralement, montrer que l'image par I d'un cercle ne passant pas par 0 est un cercle.
3) Montrer que l'image par I d'un cercle passant par 0 (mais privé de 0) est une droite.

---

7 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) $(x,y) \longmapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2) $(x,y) \longmapsto (1,x-y,y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
3) $(x,y) \longmapsto (2x+y,3x-2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
4) $(x,y,z) \longmapsto (x+y+z,x-y-z,x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

8

1) On note f l'application $(x,y) \longmapsto \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{2xy}{x+y}\right)$ de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ dans lui-même.
   a) f est-elle injective ?
   b) Déterminer son image.
2) On note f l'application $(x,y) \longmapsto \dfrac{2x+3y}{x+y}$ de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
   a) f est-elle injective ?
   b) Déterminer son image.
3) On note f l'application $(x,y) \longmapsto (x+y,xy)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   a) Soit $(s,p) \in \mathbb{R}^2$. À quelle condition nécessaire et suffisante (s,p) est-il dans l'image de f ?
   b) Déterminer l'image réciproque par f de l'ensemble $\left\{(s,p) \in \mathbb{R}^2 / \quad s^2-4p=1\right\}$.

---

2 Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies abstraitement

9 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, croissantes, pour lesquelles : $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

---

10 Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) \leqslant n$.

---

11 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) + f \circ f(n) = 2n$.

---

3 Applications entre ensembles quelconques

12 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. On suppose $f \circ g \circ f$ bijective. Montrer que f et g le sont alors elles aussi.

---

13 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que : $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que : $f = \mathrm{Id}_E$.

---

14 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

---

15 Soient E, F et G trois ensembles non vides et $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que l'application $\varphi \longmapsto f \circ \varphi$ de E^G dans F^G est injective si et seulement si f l'est.

---

16 Soient E, F et I trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A et A' deux parties de E et B et B' deux parties de F.

1) Montrer que : $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$.

2) Montrer que : $f^{-1}\big(B \cup B'\big) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ et : $f^{-1}\big(B \cap B'\big) = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

3) a) Montrer l'égalité : $f\big(A \cup A'\big) = f(A) \cup f(A')$ et l'inclusion : $f\big(A \cap A'\big) \subset f(A) \cap f(A')$.

b) Trouver un contre-exemple à l'inclusion :

$$f(A) \cap f(A') \subset f\big(A \cap A'\big),$$

puis montrer l'égalité dans le cas où f est injective.

17

1) Si une application est injective sur deux parties de son ensemble de définition, l'est-elle sur leur réunion ?

2) Soient E et F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E. On suppose que : $E = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, i.e. que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_n \subset A_{n+1}$. Montrer que si $f\big|_{A_n}$ est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f elle-même l'est sur E tout entier.

---

18 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1) a) Comparer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et A pour toute partie A de E. Commencer par un dessin.

b) Montrer que si f est injective, alors pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$: $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

c) Montrer que la réciproque est vraie.

2) a) Comparer $f\big(f^{-1}(B)\big)$ et B pour toute partie B de F. Commencer par un dessin.

b) Montrer que si f est surjective, alors pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$: $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

c) Montrer que la réciproque est vraie.

3) Montrer que f est bijective si et seulement si pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$: $f\big(\overline{A}\big) = \overline{f(A)}$.

---

19 Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On note f l'application $X \longmapsto \big(X \cap A, X \cap B\big)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$.

1) Montrer que f est injective si et seulement si : $A \cup B = E$.

2) Montrer que f est surjective si et seulement si : $A \cap B = \varnothing$.

---

20 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On note δ l'application $A \longmapsto f(A)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(F)$ et ρ l'application $B \longmapsto f^{-1}(B)$ de $\mathscr{P}(F)$ dans $\mathscr{P}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

1) f injective $\Longleftrightarrow$ δ injective $\Longleftrightarrow$ ρ surjective.

2) f surjective $\Longleftrightarrow$ δ surjective $\Longleftrightarrow$ ρ injective.

---

21 Soient E un ensemble et $\varphi : \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0,1\}^E \\ x & \longmapsto & \varphi_x \end{array}\right.$ une application. Montrer que l'application $x \longmapsto 1 - \varphi_x(x)$ n'appartient pas à $\mathrm{Im}\,\varphi$. Ceci montre en particulier que φ n'est pas surjective de E sur $\{0,1\}^E$.
