APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES USUELS

1 On note f l'application $n \longmapsto n+1$ sur $\mathbb{N}$ et g l'application $n \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n-1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{N}$. Montrer que $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, mais que ni f ni g n'est bijective de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$. Que faut-il en retenir ?

2

1) Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque.
2) Même question avec th de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
3) Même question avec ch de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.

---

3 Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1) $(x,y) \longmapsto 2y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2) $(x,y) \longmapsto (1,x-y,y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
3) $(x,y) \longmapsto (2x+y,3x-2y)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
4) $(x,y,z) \longmapsto (x+y+z,x-y-z,x)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

4

1) On note f la fonction $x \longmapsto \sin\dfrac{\pi}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer $f\big(]0,1]\big)$ et $f^{-1}\big(\{0\}\big)$.
2) Déterminer l'image réciproque de $[-1,2]$ par la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2+x+1}$.
3) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$. Déterminer l'image de f et $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{4},1\right]\right)$.

---

5 Trouver une bijection explicite de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Z}$.

---

6 Montrer que l'application $(a,b) \longmapsto a+b\sqrt{2}$ est injective de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$.

---

7 Déterminer l'image directe de $[1,2]\times[0,\pi]$ et l'image réciproque du disque de $\mathbb{C}$ de centre 0 et de rayon 1 par la fonction $(x,y) \longmapsto e^{x+iy}$.

---

8 On note I l'application $z \longmapsto \dfrac{1}{z}$ sur $\mathbb{C}^*$.

1) Montrer que I est bijective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}^*$ et déterminer sa réciproque.
2) Quelle est l'image de $\mathbb{U}$ par I ? Montrer que l'image d'un cercle de centre 0 est un cercle.
3) Vérifier que pour tous $u,v \in \mathbb{C}$:
$$|u+v|^2 = |u|^2+2\mathrm{Re}\big(u\overline{v}\big)+|v|^2 = |u|^2+2\mathrm{Re}\big(\overline{u}v\big)+|v|^2.$$
4) Montrer que l'image par I d'un cercle passant par 0 (mais privé de 0) est une droite.
5) Montrer que l'image par I d'un cercle ne passant pas par 0 est un cercle.

---

9 Soit $a \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{U}$. On note f la fonction :
$$z \longmapsto \frac{z+a}{\overline{a}z+1}.$$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{U}$ et à valeurs dans $\mathbb{U}$.
2) Montrer que f est bijective de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et déterminer sa réciproque.

10

1) On note f l'application $(x,y) \longmapsto \dfrac{2x+3y}{x+y}$ de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
   a) L'application f est-elle injective ?
   b) Déterminer son image.
2) On note f l'application $(x,y) \longmapsto \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{2xy}{x+y}\right)$ de $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ dans lui-même.
   a) L'application f est-elle injective ?
   b) Déterminer son image ainsi que $f^{-1}\Big(\big\{(3,2)\big\}\Big)$.
3) On note f l'application $(x,y) \longmapsto \big(2x+y,x^2+y\big)$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   a) L'application f est-elle injective ?
   b) Montrer que $f|_{[1,+\infty[\times\mathbb{R}}$ est bijective de $[1,+\infty[\times\mathbb{R}$ sur son image (à préciser).

---

11 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, croissantes, pour lesquelles $f\circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

---

12 Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad f(n) \leqslant n$.

---

13 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad f(n)+f\circ f(n) = 2n$.

---

14 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction injective. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES QUELCONQUES

15 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications. On suppose $f\circ g\circ f$ bijective. Montrer que f et g le sont alors elles aussi.

---

16 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f\circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que $f = \mathrm{Id}_E$.

---

17 Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f\circ f\circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

18 🕑🕑🕑 Soient E un ensemble et $f_1, \dots, f_n$ des applications de E dans E. Montrer que si $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$ est injective sur E et $f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$ surjective de E sur E, alors $f_1, \dots, f_n$ sont bijectives de E sur E.

---

19 🕑🕑 Soient E, F et G trois ensembles non vides et $f : F \longrightarrow G$ une application. Montrer que l'application $\varphi \longmapsto f \circ \varphi$ de F^E dans G^E est injective si et seulement si f l'est.

---

20 🕑🕑

1) Si une application est injective sur deux parties de son ensemble de définition, l'est-elle sur leur réunion ?

2) Soient E et F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de E. On suppose que $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, i.e. que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $f_{|A_n}$ est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$, f l'est sur E tout entier.

---

21 🕑 On note φ l'application $X \longmapsto X \cap 2\mathbb{N}$ de $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ dans $\mathscr{P}(\mathbb{N})$.

1) φ est-elle injective ?

2) φ est-elle surjective ? Déterminer son image.

---

22 🕑🕑 Soient E un ensemble et A une partie de E. On note φ l'application $X \longmapsto X \cup A$ de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même.

1) φ est-elle injective ?

2) φ est-elle surjective ? Déterminer son image.

---

23 🕑🕑🕑 Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. On note f l'application $X \longmapsto \big(X \cap A, X \cap B\big)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$. Montrer que :

1) f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

2) f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

---

24 🕑 Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Montrer que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$.

---

25 🕑🕑 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1) a) Comparer $f^{-1}\big(f(A)\big)$ et A pour toute partie A de E. Commencer par un dessin.

b) Montrer que si f est injective, alors pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$: $\quad f^{-1}\big(f(A)\big) = A$.

c) 🕑🕑🕑 Montrer que la réciproque est vraie.

2) a) Comparer $f\big(f^{-1}(B)\big)$ et B pour toute partie B de F. Commencer par un dessin.

b) Montrer que si f est surjective, alors pour tout $B \in \mathscr{P}(F)$: $\quad f\big(f^{-1}(B)\big) = B$.

c) Montrer que la réciproque est vraie.

3) 🕑🕑🕑 Montrer que f est bijective si et seulement si $f\big(\overline{A}\big) = \overline{f(A)}$ pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$.

---

26 🕑🕑🕑 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On note δ l'application $A \longmapsto f(A)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(F)$ et ρ l'application $B \longmapsto f^{-1}(B)$ de $\mathscr{P}(F)$ dans $\mathscr{P}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

1) f injective $\iff$ δ injective $\iff$ ρ surjective.

2) f surjective $\iff$ δ surjective $\iff$ ρ injective.
