

1 FONCTIONS

DÉFINIES EXPLICITEMENT

1 ☉ On note f l'application $n \mapsto 2n$ de \mathbb{N} dans \mathbb{N} et g l'application de \mathbb{N} dans \mathbb{N} définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f et g . Que vaut $g \circ f$? Que faut-il en retenir ?

2 ☉ On note f l'application $n \mapsto n + 1$ sur \mathbb{N} et g l'application $n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n - 1 & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$ sur \mathbb{N} . Montrer que $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ mais que ni f ni g n'est bijective de \mathbb{N} sur \mathbb{N} . Que faut-il en retenir ?

3 ☉

- 1) Montrer que la fonction tangente hyperbolique est bijective de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque.
- 2) Même question avec la fonction sinus hyperbolique de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- 3) Même question avec la fonction cosinus hyperbolique de \mathbb{R}_+ sur $[1, +\infty[$.

4 ☉ ☉

- 1) Déterminer l'image de la fonction $x \mapsto xe^x$ et l'image réciproque de \mathbb{R}_- par cette fonction.
- 2) Déterminer l'image de la fonction $x \mapsto x^n \ln x$ sur \mathbb{R}_+^* pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- 3) On note f la fonction $x \mapsto \sin \frac{\pi}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* . Déterminer $f(]0, 1])$ et $f^{-1}(\{0\})$.
- 4) Déterminer l'image de $] -2, 4]$ et l'image réciproque de $[-1, 2]$ par $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$.
- 5) Déterminer l'image de $x \mapsto \frac{x-1}{x^2 + x + 1}$ et l'image réciproque de $[-2, 0]$ par cette fonction.
- 6) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^3 + 1}$ est bijective de $[-1, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer sa réciproque.
- 7) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 8}$ est bijective de $[2, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer sa réciproque.
- 8) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{\ln \frac{x+1}{x-1}}$ est bijective de $]1, +\infty[$ sur son image (que l'on précisera) et déterminer sa réciproque.
- 9) On note f la fonction $x \mapsto x^2 + 4x + 1$ sur \mathbb{R} .
 - a) Sur quels intervalles (les plus grands possible) f est-elle injective ? Déterminer, sur chacun de ces domaines I , la réciproque de $f|_I$.
 - b) Déterminer $f([-3, 0])$, $f^{-1}([0, 1])$, $f^{-1}(\{-1\})$ et $f^{-1}(\{-4\})$.

10) On note f la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$.

- a) Déterminer l'image de f .
- b) Montrer que f est injective sur $[-1, 1]$ et déterminer $(f|_{[-1, 1]})^{-1}$.
- c) Déterminer $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{4}, 1\right]\right)$.

11) On note f la fonction $x \mapsto x \ln x + \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* .

- a) Sur quels intervalles (les plus grands possible) f est-elle injective ?
- b) Déterminer $f\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]\right)$.

5 ☉ ☉ Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Montrer que $z \mapsto \frac{z + \omega}{\omega z + 1}$ est bijective de \mathbb{U} sur \mathbb{U} et déterminer sa réciproque.

6 ☉ ☉ On note I l'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ sur \mathbb{C}^* .

- 1) Montrer que I est bijective de \mathbb{C}^* sur \mathbb{C}^* et déterminer sa réciproque.
- 2) a) Montrer que l'image par I d'un cercle de centre 0 est un cercle. Quelle est l'image de \mathbb{U} en particulier ?
b) Plus généralement, montrer que l'image par I d'un cercle ne passant pas par 0 est un cercle.
- 3) Montrer que l'image par I d'un cercle passant par 0 (mais privé de 0) est une droite.

7 ☉ Les applications suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

- 1) $(x, y) \mapsto 2y$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .
- 2) $(x, y) \mapsto (1, x - y, y)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 .
- 3) $(x, y) \mapsto (2x + y, 3x - 2y)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .
- 4) $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y - z, x)$ de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^3 .

8 ☉ ☉

- 1) On note f l'application $(x, y) \mapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{2xy}{x+y}\right)$ de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans lui-même.
 - a) f est-elle injective ?
 - b) Déterminer son image.
- 2) On note f l'application $(x, y) \mapsto \frac{2x + 3y}{x + y}$ de $(\mathbb{R}_+^*)^2$ dans \mathbb{R}_+^* .
 - a) f est-elle injective ?
 - b) Déterminer son image.
- 3) On note f l'application $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$ de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 .
 - a) Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$. À quelle condition nécessaire et suffisante (s, p) est-il dans l'image de f ?
 - b) Déterminer l'image réciproque par f de l'ensemble $\{(s, p) \in \mathbb{R}^2 / s^2 - 4p = 1\}$.

2 FONCTIONS DE \mathbb{R} DANS \mathbb{R} DÉFINIES ABSTRAITEMENT

9 ☹☹ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, croissantes, pour lesquelles : $f \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}}$.

10 ☹☹ Déterminer toutes les injections $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) \leq n$.

11 ☹☹☹ Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(n) + f \circ f(n) = 2n$.

3 APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES QUELCONQUES

12 ☹☹ Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux applications. On suppose $f \circ g \circ f$ bijective. Montrer que f et g le sont alors elles aussi.

13 ☹☹ Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. On suppose que : $f \circ f = f$ et que f est injective ou surjective. Montrer que : $f = \text{Id}_E$.

14 ☹☹ Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. On suppose que : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.

15 ☹☹ Soient E, F et G trois ensembles non vides et $f : E \rightarrow F$ une application. Montrer que l'application $\varphi \mapsto f \circ \varphi$ de E^G dans F^G est injective si et seulement si f l'est.

16 ☹☹ Soient E, F et I trois ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application, A et A' deux parties de E et B et B' deux parties de F .

- 1) Montrer que : $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
- 2) Montrer que : $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$
et : $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.
- 3) a) Montrer l'égalité : $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
et l'inclusion : $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.
b) Trouver un contre-exemple à l'inclusion :

$$f(A) \cap f(A') \subset f(A \cap A'),$$

puis montrer l'égalité dans le cas où f est injective.

17

- 1) ☹☹ Si une application est injective sur deux parties de son ensemble de définition, l'est-elle sur leur réunion ?
 - 2) ☹☹ Soient E et F des ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de E . On suppose que : $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, i.e. que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_n \subset A_{n+1}$. Montrer que si $f|_{A_n}$ est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f elle-même l'est sur E tout entier.
-

18 Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application.

- 1) a) ☹☹ Comparer $f^{-1}(f(A))$ et A pour toute partie A de E . Commencer par un dessin.
b) ☹☹ Montrer que si f est injective, alors pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$: $f^{-1}(f(A)) = A$.
c) ☹☹☹ Montrer que la réciproque est vraie.
 - 2) a) ☹☹ Comparer $f(f^{-1}(B))$ et B pour toute partie B de F . Commencer par un dessin.
b) ☹☹ Montrer que si f est surjective, alors pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$: $f(f^{-1}(B)) = B$.
c) ☹☹☹ Montrer que la réciproque est vraie.
 - 3) ☹☹☹ Montrer que f est bijective si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$: $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.
-

19 ☹☹☹ Soient E un ensemble et A et B deux parties de E . On note f l'application $X \mapsto (X \cap A, X \cap B)$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

- 1) Montrer que f est injective si et seulement si : $A \cup B = E$.
 - 2) Montrer que f est surjective si et seulement si : $A \cap B = \emptyset$.
-

20 ☹☹☹ Soient E et F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. On note δ l'application $A \mapsto f(A)$ de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$ et ρ l'application $B \mapsto f^{-1}(B)$ de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$. Montrer les équivalences suivantes :

- 1) f injective $\iff \delta$ injective $\iff \rho$ surjective.
 - 2) f surjective $\iff \delta$ surjective $\iff \rho$ injective.
-

21 ☹☹ Soient E un ensemble et $\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow & \{0, 1\}^E \\ x & \mapsto & \varphi_x \end{cases}$ une application. Montrer que l'application $x \mapsto 1 - \varphi_x(x)$ n'appartient pas à $\text{Im } \varphi$. Ceci montre en particulier que φ n'est pas surjective de E sur $\{0, 1\}^E$.
