

En premier lieu, refaites donc les exercices du chapitre « Calculs de primitives et d'intégrales » !

1 CALCULS DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES

- 1) Calculer les intégrales suivantes :
- 1) $\int_0^1 \max\{e^t, 2\} dt.$ 2) $\int_0^1 |3t - 1| dt.$
 - 3) $\int_0^n e^{t^2} dt \quad (n \in \mathbb{N}).$
 - 4) $\int_0^4 \sin \frac{|x|\pi}{4} dx.$ 5) $\int_{-1}^2 x|x| dx.$

- 2) Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
- 1) $x \mapsto e^{2x} \sin x.$ 2) $x \mapsto \operatorname{ch} x \cos x.$

- 3) Calculer :
- 1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x dx.$
 - 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin(3x) dx.$

- 4) Calculer :
- 1) $\int_0^1 \operatorname{Arctan} x dx.$
 - 2) $\int_0^1 x(\operatorname{Arctan} x)^2 dx.$

- 5) Déterminer une primitive des fonctions suivantes en commençant par y effectuer un changement de variable :
- 1) $x \mapsto \frac{1}{(1+x^2)^3}$ en posant : $x = \tan t.$
 - 2) $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$ en posant : $t = \sqrt{x+1}.$

- 6) Déterminer pour tout $z \in \mathbb{C}$ une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t-z}.$

- 7) Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ bijective de I sur $J = f(I).$ On note F une primitive de f sur $I.$ Déterminer une expression explicite d'une primitive de f^{-1} sur $J.$

- 8) On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 t}{\cos(2t)} dt$
 et : $J = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos(2t)} dt.$
- 1) Calculer $I + J$ en posant : $x = \tan t.$
 - 2) En déduire I et $J.$

- 9) 1) Justifier, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \llbracket 0, p \rrbracket,$ l'existence de l'intégrale : $I_{p,q} = \int_0^1 x^p (\ln x)^q dx.$
 2) Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$ pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \llbracket 1, p \rrbracket.$
 3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} :$
- $$I_{n,n} = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

- 10) On pose pour tout $n \in \mathbb{N} :$
- $$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t dt \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$
- 1) a) Calculer u_0 et simplifier $u_n + u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}.$
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} :$
- $$S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n.$$
- 2) a) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$
 b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty,$ puis la valeur de : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n.$

- 11) 1) Justifier qu'on peut poser :
- $$I(x) = \int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$$
- pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$
- 2) Montrer que la fonction I ainsi définie est paire.
 - 3) a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R},$ décomposer le polynôme $X^4 - 2X^2 \cos \theta + 1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X].$
 b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$ Calculer $I(x^2)$ en fonction de $I(x),$ puis $I(x^{2^n})$ en fonction de $I(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}.$
 - 4) a) Calculer $I(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[.$
 b) Après avoir calculé $I\left(\frac{1}{x}\right),$ calculer $I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$

2 EXERCICES ABSTRAITS DIVERS

- 12) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$ Montrer que f possède une et une seule primitive F sur $[0, 1]$ pour laquelle :
- $$\int_0^1 F(t) dt = 0.$$

13

- 1) \odot Soient $f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}.$$

On pourra observer que $\lambda \mapsto \int_a^b (f + \lambda g)^2$ est polynomiale et positive ou nulle sur \mathbb{R} .

- 2) \odot Soient $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ deux fonctions positives pour lesquelles : $fg \geq 1$. Montrer

que : $\int_0^1 f(t) dt \times \int_0^1 g(t) dt \geq 1$.

- 3) $\odot \odot$ Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, a], \mathbb{R})$ une fonction pour laquelle : $f(0) = 0$. On note F l'unique primitive de $|f'|$ qui s'annule en 0.

a) Montrer l'inégalité :

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| dt \leq \int_0^a F(t)F'(t) dt.$$

b) En déduire l'inégalité d'Opial :

$$\int_0^a |f(t)f'(t)| dt \leq \frac{a}{2} \int_0^a f'(t)^2 dt.$$

14

$\odot \odot$ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $\varphi(x) = \int_0^x f(t+x) dt$.

2) $\varphi(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t) \cos t dt$.

Montrer que : $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer φ' .

15

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_{-x}^x \cos(t^2 + t) dt.$$

- 1) $\odot \odot$ Montrer que φ est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer sa dérivée.
 2) $\odot \odot$ Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

16

$\odot \odot \odot$ Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1$.

2) $f(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt$.

17

$\odot \odot$ Soient $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ ne s'annulant pas sur I et $a, b \in I$.

1) On pose pour tous $x \in I$: $g(x) = \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)} dt$.

Vérifier l'égalité : $f = f(a) e^g$.

- 2) Montrer que si : $f(a) = f(b)$, alors le nombre complexe $\frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)} dt$ est un entier relatif.

18

$\odot \odot$ Soient $f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ monotones de mêmes sens de variation.

- 1) Montrer que pour tous $x, y \in [a, b]$:

$$(f(y) - f(x))(g(y) - g(x)) \geq 0.$$

- 2) En déduire l'inégalité :

$$\int_a^b f(t) dt \int_a^b g(t) dt \leq (b-a) \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

19

$\odot \odot$ Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. À quelle condition nécessaire et suffisante l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$$

est-elle une égalité ?

20

$\odot \odot$ Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \int_a^b f(t) \sin(xt) dt$$

est lipschitzienne sur \mathbb{R} .

21

$\odot \odot$ Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ une fonction pour laquelle :

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{1}{2}.$$

Montrer que f possède un point fixe.

22

$\odot \odot$ Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

- 1) Calculer : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- 2) Justifier l'existence du réel $\sup |P|$, puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|a_k| \leq \sup_{\cup} |P|$.

23

Soit $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

- 1) On suppose que : $\int_a^b t^k f(t) dt = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

a) \odot Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_a^b P(t)f(t) dt = 0.$$

- b) $\odot \odot \odot$ En déduire que f s'annule au moins $n + 1$ fois sur $[a, b]$.

2) On suppose à présent que pour tout

$$k \in \mathbb{N} : \int_a^b t^k f(t) dt = 0.$$

a) Montrer, en utilisant le théorème d'approximation des fonctions continues par des fonctions en escalier, que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_a^b f(t)^2 dt \leq \varepsilon \int_a^b |f(t)| dt.$$

b) En déduire que f est nulle sur $[a, b]$.

24) Montrer que pour tous $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{a_i a_j}{i + j + 1} \geq 0.$$

3 LIMITES D'INTÉGRALES

25) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction continue par morceaux sur $[0, 1]$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2n(1 - nx) & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Représenter graphiquement f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis

comparer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$.

26) Étudier les limites suivantes :

1) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{e^t + 1} dt$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$.

27) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$:

$$\int_0^x \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},$$

puis faire tendre n vers $+\infty$.

28) Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Calculer : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, puis interpréter géométriquement.

29)

1) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

2) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{\pi x} \frac{\sin t}{t^2} dt$.

30)

1) Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$$

2) En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \sin \frac{\pi}{t+x} dt$.

31)

On pose :

$$f(x) = \begin{cases} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \ln 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1) a) Calculer l'intégrale : $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

b) En déduire que pour tout $x \in]0, 1[$:

$$x^2 \ln 2 \leq f(x) \leq x \ln 2$$

et que pour tout $x \in]1, +\infty[$:

$$x \ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2.$$

c) Montrer alors que f est continue en 0 et en 1 et calculer : $\lim_{+\infty} f$.

2) a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ et y calculer f' .

b) En déduire enfin que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ tout entier.

3) Justifier l'existence de : $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$ et déterminer la valeur de cette intégrale.

32)

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$. Montrer le lemme de

Riemann-Lebesgue : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(xt) dt = 0$.

33)

Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t^n) dt = f(0).$$

34)

Soit $f \in \mathcal{C}\mathcal{M}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

On suppose que : $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} f(t) dt = 0$.

35)

Soient $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ positive ou nulle.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{\int_a^b f(t)^n dt} \leq \sqrt[n]{b-a} \|f\|_\infty.$$

2) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\int_a^b f(t)^n dt} = \|f\|_\infty.$$

4 FORMULES DE TAYLOR-LAGRANGE

36 ☉ Soient $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ et $a \in I$. Montrer que la fonction $x \mapsto \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt$ est une primitive $n^{\text{ème}}$ de f sur I .

37 ☉☉ Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

38 ☉☉ Montrer que : $\sin x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
 et : $\cos x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

39 ☉☉ Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$:

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n=k}^p \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \quad (\text{formule du binôme négatif}).$$

40 ☉☉ Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose f et f'' bornées sur \mathbb{R} .

1) Montrer que pour tous $x, h \in \mathbb{R}$:

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} \|f''\|_\infty$$

et : $|f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{h^2}{2} \|f''\|_\infty$.

2) En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$|f'(x)| \leq \frac{\|f\|_\infty}{h} + \frac{h}{2} \|f''\|_\infty, \quad \text{puis que } f' \text{ est bornée sur } \mathbb{R}.$$

3) En déduire l'inégalité : $\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.

41 Soient $\lambda > 0$ et $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(0) = 0$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(t)| \leq \lambda^n n!.$$

- 1) ☉☉ Montrer qu'alors f est nulle sur $\left[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right]$.
- 2) ☉☉☉ Montrer que f est même nulle sur \mathbb{R} tout entier.

5 SOMMES DE RIEMANN

42 ☉☉ Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

- 1) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$.
- 2) $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

$$3) \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2 + k^2} \quad 4) \sum_{k=1}^n k^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+).$$

$$5) \sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{n} \quad 6) \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}.$$

43 ☉☉

1) Montrer que pour tout $x \geq -\frac{1}{2}$:

$$x - x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2) Calculer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

3) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

44 ☉☉

1) Soient $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = n \sum_{k=1}^n a_k b_k - \left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\sum_{j=1}^n b_j\right).$$

b) On suppose à présent : $a_1 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq \dots \leq b_n$. Montrer l'inégalité :

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_j\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

2) Soient $f, g \in \mathcal{C}\mathcal{M}([a, b], \mathbb{R})$ croissantes. Montrer que :

$$\int_a^b f(t) dt \int_a^b g(t) dt \leq (b-a) \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

45 ☉☉☉ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Après en avoir justifié l'existence, calculer : $\int_0^{2\pi} \ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) d\theta$ grâce à des sommes de Riemann.