Pour commencer,
refaites donc les exercices du chapitre
« Calculs de primitives et d'intégrales » !

CALCULS EXACTS DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES

1 Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \min\left\{t, 1-2t^2\right\} dt$. 2) $\displaystyle\int_0^1 |3t-1|\, dt$.

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n e^{-\lfloor t\rfloor} dt$. 4) $\displaystyle\int_0^4 \sin\frac{\lfloor x\rfloor \pi}{4}\, dx$.

---

2 Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto e^{2x}\sin x$. 2) $x \longmapsto \operatorname{ch} x \cos x$.

---

3 Calculer : 1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x\, dx$.

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin(3x)\, dx$.

---

4 Calculer : 1) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan} x\, dx$.

2) $\displaystyle\int_0^1 x\,(\operatorname{Arctan} x)^2\, dx$.

---

5 Calculer les intégrales suivantes, puis faire tendre a vers $+\infty$:

1) $\displaystyle\int_3^a \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$ en posant $t=\sqrt{x+1}$.

2) $\displaystyle\int_0^a \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$ en posant $x=\tan t$.

---

6 Déterminer pour tout $z\in\mathbb{C}$ une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t-z}$.

---

7 Soit $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$ bijective de I sur $J=f(I)$. On note F une primitive de f sur I. Déterminer une expression explicite d'une primitive de f^{-1} sur J.

---

8 On pose $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 t}{\cos(2t)}\, dt$ et $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos(2t)}\, dt$.

1) Calculer $I+J$ en posant $x=\tan t$.
2) En déduire I et J.

9

1) Justifier pour tous $p\in\mathbb{N}$ et $q\in[\![0,p]\!]$ l'existence de l'intégrale $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 x^p(\ln x)^q\, dx$.
2) Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$ pour tous $p\in\mathbb{N}^*$ et $q\in[\![1,p]\!]$. On commencera par un calcul sur $[\varepsilon,1]$ pour tout $\varepsilon\in]0,1]$.
3) En déduire que $I_{n,n}=(-1)^n\dfrac{n!}{(n+1)^{n+1}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

---

10 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t\, dt \qquad \text{et} \qquad S_n=\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

1) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2) Simplifier u_n+u_{n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\dfrac{\pi}{4}+(-1)^n u_n$.
4) Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n}$ et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

11

1) a) Factoriser $X^2-2X\cos\theta+1$ pour tout $\theta\in\mathbb{R}$.
b) Justifier qu'on peut poser :
$$I(x)=\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2-2x\cos\theta+1\right) d\theta$$
pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.
2) Montrer que la fonction I est paire.
3) a) Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, déterminer la factorisation irréductible sur $\mathbb{R}$ de $X^4-2X^2\cos\theta+1$.
b) En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$:
$$I\left(x^2\right)=2I(x).$$
4) a) Montrer que pour tout $x\in]-1,1[$:
$$4\pi\ln\left(1-|x|\right)\leqslant I(x)\leqslant 4\pi\ln\left(1+|x|\right)$$
en exploitant l'inégalité triangulaire.
b) En déduire que I est nulle sur $]-1,1[$.
5) Après avoir calculé $I\left(\dfrac{1}{x}\right)$, calculer $I(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

EXERCICES DIVERS

12 Soit $f\in\mathscr{C}\left([a,b],\mathbb{R}\right)$. À quelle condition nécessaire et suffisante l'inégalité triangulaire :
$$\left|\int_a^b f(t)\, dt\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right| dt$$
est-elle une égalité ?

---

13 Soit $f\in\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$.

1) Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, dt=0$, f s'annule au moins une fois.

2) Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$, f possède un point fixe.

---

14 Soit $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

---

15 Soient $f,g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ monotones de mêmes sens de variation.

1) Montrer que pour tous $x,y \in [a,b]$:
$$\big(f(y)-f(x)\big)\big(g(y)-g(x)\big) \geqslant 0.$$

2) En déduire l'inégalité :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

16

1) Soient $f,g \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$
On pourra observer que $\lambda \longmapsto \displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)^2$ est polynomiale et positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

2) Soient $f,g \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ deux fonctions positives pour lesquelles $fg \geqslant 1$. Montrer que :
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1.$$

3) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([0,a],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle $f(0)=0$. On note F l'unique primitive de $|f'|$ qui s'annule en 0.

a) Montrer que :
$$\int_0^a \big|f(t)f'(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a F(t)F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire l'*inégalité d'Opial* :
$$\int_0^a \big|f(t)f'(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

---

17 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)\,\mathrm{d}t.$

2) $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x-t)\cos t\,\mathrm{d}t.$

Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer φ'.

---

18 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_{-x}^x \cos\big(t^2+t\big)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

2) Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0, puis que son prolongement par continuité est dérivable en 0.

---

19 Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $f(x) + \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$

2) $f(x) = 1 + 2\displaystyle\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t.$

---

20 Soient I un intervalle, $a,b \in I$ et $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ une fonction qui ne s'annule pas sur I.

1) On pose pour tous $x \in I$: $g(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$ Vérifier que $f = f(a)\mathrm{e}^g$.

2) Montrer que si $f(a)=f(b)$, le nombre complexe $\displaystyle\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ est un entier relatif.

---

21 Soit $P = a_nX^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$.

1) Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} P\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Justifier l'existence du réel $\sup\limits_{\mathbb{U}}|P|$, puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|a_k| \leqslant \sup\limits_{\mathbb{U}}|P|$.

---

22 Soit $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. On fait l'hypothèse que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\displaystyle\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$

1) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
$$\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

2) En déduire que f s'annule $n+1$ fois au moins sur $]a,b[$.

---

23 Soient $a_0,\ldots,a_n \in \mathbb{R}$. On pose $P = a_nX^n + \ldots + a_0$.

1) Montrer que $\displaystyle\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} \frac{a_pa_q}{p+q+1} \geqslant 0$ en étudiant $\displaystyle\int_0^1 P(x)^2\,\mathrm{d}x$.

2)

a) Calculer $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int_0^\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}\,\mathrm{d}t\right)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, puis exprimer $\displaystyle\int_0^\pi \big|P\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big)\big|^2\,\mathrm{d}t$ en fonction de $a_0,\ldots,a_n$.

b) Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$:
$$\int_{-1}^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\int_0^\pi Q\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\big)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t.$$

c) En déduire l'*inégalité de Hilbert* :
$$\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n} \frac{a_pa_q}{p+q+1} \leqslant \pi\sum_{k=0}^n a_k^2.$$

LIMITES D'INTÉGRALES

24 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ définie par :
$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2n(1-nx) & \text{si } 0 < x < \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$
Représenter graphiquement f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$.

25 Étudier les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{e^t+1}\,dt$. 2) $\lim\limits_{x\to0^+} \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt$.

26

1) Calculer $\displaystyle\int_0^x t^k\,dt$ pour tous $x \in]-1,1]$ et $k \in \mathbb{N}$, puis montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x)$.
2) Montrer de même que pour tout $x \in [-1,1]$:
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = \operatorname{Arctan} x.$$

27 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Calculer $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, puis interpréter géométriquement.

28

1) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} \displaystyle\int_x^{\pi x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$.

29

1) Montrer que : $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$ pour tout $x \in [0,\pi]$.
2) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \sin\frac{\pi}{t+x}\,dt$.

30 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que la suite $\left(\displaystyle\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain ℓ.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \ell$:
   a) si f est positive sur $\mathbb{R}_+$.
   b) si $\big|f(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x \geqslant 1$.
   c) si $\lim\limits_{x+\infty} f(x) = 0$.
2) Trouver un exemple de fonction f pour laquelle $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ n'a pas de limite en $+\infty$.

31 On pose :
$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \ln 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

1) a) Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
   b) En déduire que $x^2\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x\ln 2$ pour tout $x \in]0,1[$ et que pour tout $x > 1$:
   $$x\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln 2.$$
   c) Montrer alors que f est continue en 0 et en 1 et calculer $\lim\limits_{+\infty} f$.
2) a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et y calculer f'.
   b) En déduire enfin que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.
3) Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ et déterminer sa valeur.

32

1) Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{C}\big)$:
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{ixt}\,dt = 0 \quad \textit{(lemme de Riemann-Lebesgue)}.$$
2) En déduire que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$:
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\cos(xt)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt = 0,$$
puis interpréter géométriquement ces limites.

33 Soit $f \in \mathscr{CM}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ une fonction pour laquelle $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt = 0$.

34 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f\big(t^n\big)\,dt = f(0).$$

35 Soient $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ positive avec $a < b$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sqrt[n]{\int_a^b f(t)^n\,dt} \leqslant \sqrt[n]{b-a}\,\|f\|_\infty.$$
2) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\displaystyle\int_a^b f(t)^n\,dt} = \|f\|_\infty$.

FORMULES DE TAYLOR-LAGRANGE

36 Soient $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et $a \in I$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$ est une primitive $n^{\text{ème}}$ de f sur I.

37 Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$:
$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

38 Montrer que $\sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et $\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

39 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tous $x, h \in \mathbb{R}$:
$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\,\|f''\|_\infty$$
et $\left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\,\|f''\|_\infty$.

2) En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$:
$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{h} + \frac{h}{2}\,\|f''\|_\infty,$$
puis que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire que $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2\,\|f\|_\infty\,\|f''\|_\infty}$.

40 Soient $\lambda > 0$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad f^{(n)}(0) = 0 \quad$ et $\quad \left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \lambda^n n!$.

1) Montrer que f est nulle sur $\left[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right]$.

2) Montrer que f est nulle sur $\mathbb{R}$.

SOMMES DE RIEMANN

41 Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$. 2) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2+k^2}$. 4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \quad (\alpha \geqslant 0)$.

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{n}$. 6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

42

1) Montrer l'existence de deux réels $\alpha > 0$ et $\lambda \geqslant 0$ pour lesquels pour tout $x \in \left]-\alpha, \alpha\right[$:
$$x - \lambda x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

2) En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ pour toute fonction $f \in \mathscr{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$.

3) Que vaut $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$?

43 Soient I un intervalle, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et $f \in \mathscr{C}\big([0,1], \mathbb{R}\big)$ à valeurs dans I.

1) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \in I$.

2) Montrer l'*inégalité de Jensen* :
$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

44 Soit $f \in \mathscr{C}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ convexe avec $a < b$. On note m la *valeur moyenne de* f : $\quad m = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

1) a) Montrer que $m \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.

b) Montrer que $m \geqslant f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ en exploitant une certaine somme de Riemann.

2) On suppose à présent f dérivable sur $[a,b]$.

a) Montrer que pour tout $c \in [a,b]$:
$$m \geqslant \left(\frac{a+b}{2} - c\right) f'(c) + f(c).$$

b) En déduire que :
$$m \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2} - (b-a)\,\frac{f'(b)-f'(a)}{4}.$$

45

1) Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que :
$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right).$$

b) On suppose $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Montrer l'*inégalité de Tchebychev* :
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

2) Soient $f, g \in \mathscr{CM}\big([a,b], \mathbb{R}\big)$ croissantes. Montrer que :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

46 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \big\{-1, 1\big\}$. Après en avoir justifié l'existence, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln\big(x^2 - 2x\cos\theta + 1\big)\,\mathrm{d}\theta$ grâce à des sommes de Riemann.