En premier lieu, refaites donc les exercices du chapitre « Calculs de primitives et d'intégrales » !

1 Calculs de primitives et d'intégrales

1 ◷ Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \max\left\{e^t, 2\right\} dt$. 2) $\displaystyle\int_0^1 |3t-1|\, dt$.

3) $\displaystyle\int_0^n e^{\lfloor t\rfloor} dt \quad (n\in\mathbb{N})$.

4) $\displaystyle\int_0^4 \sin\frac{\lfloor x\rfloor\pi}{4}\, dx$. 5) $\displaystyle\int_{-1}^2 x|x|\, dx$.

---

2 ◷ Déterminer une primitive des fonctions suivantes :
1) $x\longmapsto e^{2x}\sin x$. 2) $x\longmapsto \operatorname{ch} x\cos x$.

---

3 ◷◷ Calculer : 1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x\, dx$.

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\sin(3x)\, dx$.

---

4 Calculer : 1) ◷ $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{Arctan} x\, dx$.

2) ◷◷ $\displaystyle\int_0^1 x(\operatorname{Arctan} x)^2\, dx$.

---

5 ◷◷ Déterminer une primitive des fonctions suivantes en commençant par y effectuer un changement de variable :

1) $x\longmapsto \dfrac{1}{\left(1+x^2\right)^3}$ en posant : $x=\tan t$.

2) $x\longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x+1}}$ en posant : $t=\sqrt{x+1}$.

---

6 ◷◷ Déterminer pour tout $z\in\mathbb{C}$ une primitive de $t\longmapsto \dfrac{1}{t-z}$.

---

7 ◷◷ Soit $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{R})$ bijective de I sur $J=f(I)$. On note F une primitive de f sur I. Déterminer une expression explicite d'une primitive de f^{-1} sur J.

---

8 ◷◷ On pose : $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 t}{\cos(2t)}\, dt$ et : $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos(2t)}\, dt$.

1) Calculer $I+J$ en posant : $x=\tan t$.
2) En déduire I et J.

---

9 ◷◷

1) Justifier, pour tous $p\in\mathbb{N}$ et $q\in[\![0,p]\!]$, l'existence de l'intégrale : $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 x^p(\ln x)^q\, dx$.
2) Exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p,q-1}$ pour tous $p\in\mathbb{N}^*$ et $q\in[\![1,p]\!]$.
3) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$I_{n,n}=(-1)^n\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

---

10 ◷◷ On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$u_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t\, dt \qquad\text{et}\qquad S_n=\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

1) a) Calculer u_0 et simplifier u_n+u_{n+1} pour tout $n\in\mathbb{N}$.
b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$S_n=\frac{\pi}{4}+(-1)^n u_n.$$
2) a) Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
b) En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, puis la valeur de : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n$.

11

1) ◷ Justifier qu'on peut poser :
$$I(x)=\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2-2x\cos\theta+1\right) d\theta$$
pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,1\right\}$.
2) ◷ Montrer que la fonction I ainsi définie est paire.
3) ◷◷
a) Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, décomposer le polynôme $X^4-2X^2\cos\theta+1$ en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
b) Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-1,1\right\}$. Calculer $I\left(x^2\right)$ en fonction de $I(x)$, puis $I\left(x^{2^n}\right)$ en fonction de $I(x)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4) ◷◷
a) Calculer $I(x)$ pour tout $x\in\,]-1,1[$.
b) Après avoir calculé $I\left(\dfrac{1}{x}\right)$, calculer $I(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

---

2 Exercices abstraits divers

12 ◷◷ Soit $f\in\mathscr{C}\left([0,1],\mathbb{R}\right)$. Montrer que f possède une et une seule primitive F sur $[0,1]$ pour laquelle :
$$\int_0^1 F(t)\, dt=0.$$

13

1) Soient $f, g \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t}\,\sqrt{\int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t}.$$
On pourra observer que $\lambda \longmapsto \int_a^b (f+\lambda g)^2$ est polynomiale et positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.

2) Soient $f, g \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ deux fonctions positives pour lesquelles : $fg \geqslant 1$. Montrer que : $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \times \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 1$.

3) Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([0,a],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle : $f(0)=0$. On note F l'unique primitive de $|f'|$ qui s'annule en 0.

a) Montrer l'inégalité :
$$\int_0^a \big|f(t)f'(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^a F(t)F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire l'*inégalité d'Opial* :
$$\int_0^a \big|f(t)f'(t)\big|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a f'(t)^2\,\mathrm{d}t.$$

---

14 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $\varphi(x) = \int_0^{2\pi} f(x-t)\cos t\,\mathrm{d}t$.

2) $\varphi(x) = \int_0^{x} f(t+x)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que $\varphi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et calculer φ'.

---

15 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:
$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_{-x}^{x} \cos\big(t^2+t\big)\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée.

2) Montrer que φ est prolongeable par continuité en 0.

---

16 Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

2) $f(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$.

---

17 Soient $f \in \mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$ ne s'annulant pas sur I et $a, b \in I$.

1) On pose pour tous $x \in I$: $g(x) = \int_a^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$. Vérifier l'égalité : $f = f(a)\,\mathrm{e}^{g}$.

2) Montrer que si : $f(a)=f(b)$, alors le nombre complexe $\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t$ est un entier relatif.

---

18 Soient $f, g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ monotones de mêmes sens de variation.

1) Montrer que pour tous $x, y \in [a,b]$:
$$\big(f(y)-f(x)\big)\big(g(y)-g(x)\big) \geqslant 0.$$

2) En déduire l'inégalité :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

---

19 Soit $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. À quelle condition nécessaire et suffisante l'inégalité triangulaire :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \big|f(t)\big|\,\mathrm{d}t$$
est-elle une égalité ?

---

20 Soit $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \int_a^b f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

---

21 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ une fonction pour laquelle : $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f possède un point fixe.

---

22 Soit $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$.

1) Calculer : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\big(\mathrm{e}^{it}\big)\mathrm{e}^{-ikt}\,\mathrm{d}t$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Montrer qu pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|a_k| \leqslant \sup_{\mathbb{U}} |P|$.

---

23 Soient $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\int_a^b t^k f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

1) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
$$\int_a^b P(t)f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

2) En déduire que f s'annule au moins $n+1$ fois sur $[a,b]$.

---

24 Montrer que pour tous $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} \frac{a_i a_j}{i+j+1} \geqslant 0.$$

---

3 LIMITES D'INTÉGRALES

25 ⏲ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction continue par morceaux sur $[0,1]$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 2n(1-nx) & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } x \geqslant \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Représenter graphiquement f_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis comparer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n$ et $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n$.

---

26 ⏲ Étudier les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^n}{e^t+1}\,dt$. **2)** $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt$.

---

27 ⏲⏲ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1,1]$:

$$\int_0^x \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1},$$

puis faire tendre n vers $+\infty$.

---

28 ⏲ Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Calculer : $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, puis interpréter géométriquement.

---

29 ⏲⏲

1) Montrer que la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ est décroissante sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \int_x^{\pi x} \frac{\sin t}{t^2}\,dt$.

---

30 ⏲⏲

1) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x.$$

2) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \sin\frac{\pi}{t+x}\,dt$.

---

31 ⏲⏲ On pose : $f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \ln 2 & \text{si } x = 1. \end{cases}$

1) a) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

b) En déduire que pour tout $x \in]0,1[$:

$$x^2\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x\ln 2$$

et que pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$x\ln 2 \leqslant f(x) \leqslant x^2\ln 2.$$

c) Montrer alors que f est continue en 0 et en 1 et calculer : $\displaystyle\lim_{+\infty} f$.

2) a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$ et y calculer f'.

b) En déduire enfin que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

3) Justifier l'existence de : $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ et déterminer la valeur de cette intégrale.

---

32 ⏲⏲ Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. Montrer le *lemme de Riemann-Lebesgue* : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^b f(t)\sin(xt)\,dt = 0$.

---

33 ⏲⏲⏲ Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f\big(t^n\big)\,dt = f(0).$$

---

34 ⏲⏲⏲ Soit $f \in \mathscr{CM}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$.
On suppose que : $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} f(t)\,dt = 0$.

---

35 Soient $f \in \mathscr{C}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ positive ou nulle.

1) ⏲ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt[n]{\int_a^b f(t)^n\,dt} \leqslant \sqrt[n]{b-a}\,\|f\|_\infty.$$

2) ⏲⏲⏲ Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\int_a^b f(t)^n\,dt} = \|f\|_\infty.$$

---

4 FORMULES DE TAYLOR-LAGRANGE

36 ⏲ Soient $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ et $a \in I$. Montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\,dt$ est une primitive $n^{\text{ème}}$ de f sur I.

---

37 ⏲⏲ Montrer que pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$:

$$x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

38 Montrer que : $\sin x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ et : $\cos x = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

39 Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$:

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=k}^{p} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \qquad \textit{(formule du binôme négatif)}.$$

40 Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose f et f'' bornées sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que pour tous $x, h \in \mathbb{R}$:

$$\left|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\,\|f''\|_\infty$$

et : $\left|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\right| \leqslant \frac{h^2}{2}\,\|f''\|_\infty$.

2) En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$: $\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{h} + \frac{h}{2}\,\|f''\|_\infty$, puis que f' est bornée sur $\mathbb{R}$.

3) En déduire l'inégalité : $\|f'\|_\infty \leqslant \sqrt{2\|f\|_\infty \|f''\|_\infty}$.

41 Soient $\lambda > 0$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f^{(n)}(0) = 0$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left|f^{(n)}(t)\right| \leqslant \lambda^n n!.$$

1) Montrer qu'alors f est nulle sur $\left[-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right]$.

2) Montrer que f est même nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier.

5 SOMMES DE RIEMANN

42 Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$.

2) $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2+k^2}$.

4) $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$.

5) $\sum_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{n}$.

6) $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$.

43

1) Montrer que pour tout $x \geqslant -\frac{1}{2}$:

$$x - x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x.$$

2) Calculer : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ pour toute fonction $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

3) En déduire : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

44

1) Soient $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que :

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = n\sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right).$$

b) On suppose à présent : $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_n$. Montrer l'inégalité :

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

2) Soient $f, g \in \mathscr{CM}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ croissantes. Montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,dt \int_a^b g(t)\,dt \leqslant (b-a)\int_a^b f(t)g(t)\,dt.$$

45 Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Après en avoir justifié l'existence, calculer : $\int_0^{2\pi} \ln\left(x^2 - 2x\cos\theta + 1\right)\,d\theta$ grâce à des sommes de Riemann.