

1 ISOMÉTRIES ABSTRAITES

1 ⌚ ⌚ Soient E un espace euclidien et $f : E \rightarrow E$ une application. On suppose que f préserve les produits scalaires : $\forall x, y \in E, \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Calculer : $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?

2 ⌚ ⌚ Soient E un espace euclidien, $f \in O(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E .

- 1) Montrer que : $f(V^\perp) = f(V)^\perp$.
- 2) Montrer que si V est stable par f , V^\perp l'est aussi.

3 ⌚ ⌚

- 1) Soient E un espace euclidien et s un endomorphisme de E qui est à la fois une isométrie vectorielle et une symétrie. Montrer que s est une symétrie orthogonale.
- 2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $M^2 = I_n$ et que M est symétrique. Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à M est alors une symétrie orthogonale de \mathbb{R}^n .

2 MATRICES ORTHOGONALES

4 ⌚ ⌚ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

- 1) Montrer que $I_n + A$ est inversible en calculant son noyau.
- 2) Montrer que la matrice $(I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est orthogonale positive.

5 ⌚ ⌚ Soit $M \in O(n)$. Montrer que :

$$\text{Ker}(M - {}^tM) = \text{Ker}(M - I_n) \oplus \text{Ker}(M + I_n).$$

6 ⌚ ⌚ On s'intéresse à l'équation \star : $\text{com}(M) = M$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Résoudre \star pour : $n = 2$.
- 2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une solution d' \star .
 - a) Calculer : $\text{tr}({}^tMM)$, puis déterminer le signe de $\det(M)$.
 - b) Montrer que $\det(M)$ ne peut prendre que deux valeurs au plus.
- 3) Résoudre \star pour : $n \neq 2$.

7 On munit \mathbb{R}^n de son produit scalaire canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire $(M, N) \mapsto \text{tr}({}^tMN)$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de rang r .

- 1) ⌚ Montrer que $\text{Im } A$ et $\text{Ker } A$ sont orthogonaux et stables par A .

- 2) ⌚ ⌚ Montrer qu'il existe une matrice symétrique $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O(n)$ pour lesquelles : $A = P \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

3) ⌚ Montrer les égalités :

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B) \quad \text{et} \quad \text{tr}(A^2) = \text{tr}(B^2).$$

- 4) ⌚ ⌚ Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que : $\text{tr}(A)^2 \leq r \text{tr}(A^2)$.

8 ⌚ ⌚ On munit \mathbb{R}^n de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ de colonnes C_1, \dots, C_n .

- 1) Montrer grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt que : $A = QR$ pour certaines $Q \in O(n)$ et $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Cette décomposition de A est appelée sa... *décomposition QR*!
- 2) a) En déduire l'inégalité de Hadamard :

$$|\det(A)| \leq \prod_{k=1}^n \|C_k\|.$$

b) À quelle condition l'inégalité de Hadamard est-elle une égalité ? Quelle interprétation géométrique ?

9 ⌚ ⌚ ⌚ Montrer que pour tout $A \in O(n)$:

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} \right| \leq n \leq \sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{ij}| \leq n\sqrt{n}.$$

10 Soient E un espace euclidien et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$: $\|f(x)\| = \|g(x)\|$.

- 1) ⌚ Montrer que : $\text{Ker } f = \text{Ker } g$.
- 2) ⌚ Montrer que pour tous $x, y \in E$:

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle g(x), g(y) \rangle.$$

- 2) ⌚ ⌚ ⌚ En déduire l'existence d'une isométrie $\varphi \in O(E)$ pour laquelle : $g = \varphi \circ f$.

3 ISOMÉTRIES VECTORIELLES EN DIMENSION 2

11 ⌚ Caractériser géométriquement les endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. & 2) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}. \\ 3) \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}. & 4) \frac{1}{25} \begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}. \end{array}$$

12 ⌚ ⌚ Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $f \in \text{SO}(E)$. Montrer que si f possède un point fixe autre que 0_E , alors : $f = \text{Id}_E$.

13 ⌚⌚ Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

- 1) Montrer que la composée de deux réflexions de E est une rotation et illustrer le résultat géométriquement.
- 2) Inversement, montrer que toute rotation vectorielle de E est la composée de deux réflexions.

14 ⌚⌚ Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2, r une rotation de E et s une réflexion de E . Caractériser géométriquement srs et rsr .

4 ISOMÉTRIES VECTORIELLES EN DIMENSION SUPÉRIEURE

15 ⌚⌚ Caractériser géométriquement les endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes :

- 1) $\frac{1}{9} \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.
- 3) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

16 ⌚⌚ Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a et b la matrice M est-elle orthogonale ? Pour ces valeurs, caractériser géométriquement l'application linéaire canoniquement associée à M .

17 ⌚⌚⌚

- 1) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $a \in E$ unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$. On oriente le plan $\text{Vect}(a)^\perp$ par son vecteur normal a et on note r l'unique endomorphisme de E pour lequel : $r(a) = a$ et pour lequel $r|_{\text{Vect}(a)^\perp}$ est la rotation d'angle de mesure θ . On dit alors que r est la *rotation (vectorielle) de E d'angle de mesure θ et d'axe par a* .
 - a) Illustrer cette définition par un dessin.
 - b) Pourquoi est-il important de préciser « et d'axe ORIENTÉ par a » ?
 - c) Déterminer la matrice de r dans une base orthonormale de E adaptée à la décomposition : $E = \text{Vect}(a)^\perp \oplus \text{Vect}(a)$.
 - d) Montrer que r est une isométrie vectorielle positive de E .
 - e) Déterminer les points fixes de r .
 - f) Calculer $\text{tr}(r)$ en fonction de θ .

- 2) Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation vectorielle de \mathbb{R}^3 d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et d'axe orienté par $(3, 0, 4)$.
- 3) **ON ADMET** — programme de spé — que toute isométrie positive en dimension 3 est une rotation au sens de la question 1). Caractériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement

associé à la matrice $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

5 PRODUIT VECTORIEL

18 Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u, v \in E$ non colinéaires.

- 1) ⌚ Pourquoi peut-on orienter le plan $\text{Vect}(u, v)$ à l'aide du vecteur $u \wedge v$?
- 2) ⌚⌚⌚ On note r l'unique rotation de $\text{Vect}(u, v)$, disons d'angle de mesure θ , pour laquelle :

$$\frac{v}{\|v\|} = r \left(\frac{u}{\|u\|} \right).$$

Montrer qu'alors : $\|u \wedge v\| = \|u\| \cdot \|v\| \sin \theta$.