1 Isométries abstraites

1 ◷ Soient E un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que f préserve les produits scalaires : $\forall x, y \in E, \quad \langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$. Calculer : $\left\| f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y) \right\|^2$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?

---

2 ◷◷ Soient E un espace euclidien, $f \in \mathrm{O}(E)$ et V un sous-espace vectoriel de E.

1) Montrer que : $f\left(V^\perp\right) = f(V)^\perp$.
2) Montrer que si V est stable par f, $V^\perp$ l'est aussi.

---

3 ◷◷

1) Soient E un espace euclidien et s un endomorphisme de E qui est à la fois une isométrie vectorielle et une symétrie. Montrer que s est une symétrie orthogonale.
2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $M^2 = I_n$ et que M est symétrique. Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à M est alors une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

---

2 Matrices orthogonales

4 ◷◷ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1) Montrer que $I_n + A$ est inversible en calculant son noyau.
2) Montrer que la matrice $(I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est orthogonale positive.

---

5 ◷◷ Soit $M \in \mathrm{O}(n)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\left(M - {}^tM\right) = \mathrm{Ker}\,(M - I_n) \oplus \mathrm{Ker}\,(M + I_n).$$

---

6 ◷◷ On s'intéresse à l'équation ★ : $\mathrm{com}(M) = M$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Résoudre ★ pour : $n = 2$.
2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une solution d'★.
   a) Calculer : $\mathrm{tr}\left({}^tMM\right)$, puis déterminer le signe de $\det(M)$.
   b) Montrer que $\det(M)$ ne peut prendre que deux valeurs au plus.
3) Résoudre ★ pour : $n \neq 2$.

---

7 On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire $(M, N) \longmapsto \mathrm{tr}\left({}^tMN\right)$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de rang r.

1) ◷ Montrer que $\mathrm{Im}\,A$ et $\mathrm{Ker}\,A$ sont orthogonaux et stables par A.
2) ◷◷ Montrer qu'il existe une matrice symétrique $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}(n)$ pour lesquelles : $A = P\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.
3) ◷ Montrer les égalités :
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}\left(A^2\right) = \mathrm{tr}\left(B^2\right).$$
4) ◷◷ Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que : $\mathrm{tr}(A)^2 \leqslant r\ \mathrm{tr}\left(A^2\right)$.

---

8 ◷◷ On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$.

1) Montrer grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt que : $A = QR$ pour certaines $Q \in \mathrm{O}(n)$ et $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Cette décomposition de A est appelée sa… *décomposition QR* !
2) a) En déduire l'*inégalité de Hadamard* :
$$\left|\det(A)\right| \leqslant \prod_{k=1}^n \|C_k\|.$$
   b) À quelle condition l'inégalité de Hadamard est-elle une égalité ? Quelle interprétation géométrique ?

---

9 ◷◷◷ Montrer que pour tout $A \in \mathrm{O}(n)$:

$$\left| \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} \right| \leqslant n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

---

10 Soient E un espace euclidien et $f, g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que pour tout $x \in E$: $\left\|f(x)\right\| = \left\|g(x)\right\|$.

1) ◷ Montrer que : $\mathrm{Ker}\,f = \mathrm{Ker}\,g$.
2) ◷ Montrer que pour tous $x, y \in E$:
$$\left\langle f(x), f(y) \right\rangle = \left\langle g(x), g(y) \right\rangle.$$
2) ◷◷◷ En déduire l'existence d'une isométrie $\varphi \in \mathrm{O}(E)$ pour laquelle : $g = \varphi \circ f$.

---

3 Isométries vectorielles en dimension 2

11 ◷ Caractériser géométriquement les endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes :

1) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. 2) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.
3) $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5 \end{pmatrix}$. 4) $\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7 \end{pmatrix}$.

---

12 ◷◷ Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $f \in \mathrm{SO}(E)$. Montrer que si f possède un point fixe autre que 0_E, alors : $f = \mathrm{Id}_E$.

---

13 🕑🕑 Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2.

1) Montrer que la composée de deux réflexions de E est une rotation et illustrer le résultat géométriquement.

2) Inversement, montrer que toute rotation vectorielle de E est la composée de deux réflexions.

---

14 🕑🕑 Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2, r une rotation de E et s une réflexion de E. Caractériser géométriquement srs et rsr.

---

4 Isométries vectorielles en dimension supérieure

15 🕑🕑 Caractériser géométriquement les endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes :

1) $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. **2)** $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

3) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

---

16 🕑🕑 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de a et b la matrice M est-elle orthogonale ? Pour ces valeurs, caractériser géométriquement l'application linéaire canoniquement associée à M.

---

17 🕑🕑🕑

1) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, $a \in E$ unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$. On oriente le plan $\text{Vect}(a)^\perp$ par son vecteur normal a et on note r l'unique endomorphisme de E pour lequel : $r(a) = a$ et pour lequel $r|_{\text{Vect}(a)^\perp}$ est la rotation d'angle de mesure θ. On dit alors que r est la *rotation (vectorielle) de E d'angle de mesure θ et d'axe par a.*

a) Illustrer cette définition par un dessin.

b) Pourquoi est-il important de préciser « et d'axe ORIENTÉ par a » ?

c) Déterminer la matrice de r dans une base orthonormale de E adaptée à la décomposition : $E = \text{Vect}(a)^\perp \oplus \text{Vect}(a)$.

d) Montrer que r est une isométrie vectorielle positive de E.

e) Déterminer les points fixes de r.

f) Calculer $\text{tr}(r)$ en fonction de θ.

2) Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe orienté par $(3, 0, 4)$.

3) ON ADMET — programme de spé — que toute isométrie positive en dimension 3 est une rotation au sens de la question **1)**. Caratériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

---

5 Produit vectoriel

18 Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u, v \in E$ non colinéaires.

1) 🕑 Pourquoi peut-on orienter le plan $\text{Vect}(u, v)$ à l'aide du vecteur $u \wedge v$?

2) 🕑🕑🕑 On note r l'unique rotation de $\text{Vect}(u, v)$, disons d'angle de mesure θ, pour laquelle :

$$\frac{v}{\|v\|} = r\left(\frac{u}{\|u\|}\right).$$

Montrer qu'alors : $\left\|u \wedge v\right\| = \|u\|.\|v\| \sin\theta$.
