# 1 Isométries abstraites

**1** ◷ Soient $E$ un espace euclidien et $f : E \longrightarrow E$ une application. On suppose que $f$ préserve les produits scalaires : $\forall x, y \in E, \quad \big\langle f(x), f(y)\big\rangle = \langle x, y\rangle$. Calculer : $\big\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\big\|^2$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on ?

---

**2** ◷◷ Soient $E$ un espace euclidien, $f \in \mathrm{O}(E)$ et $V$ un sous-espace vectoriel de $E$.

1) Montrer que : $f\big(V^\perp\big) = f(V)^\perp$.
2) Montrer que si $V$ est stable par $f$, $V^\perp$ l'est aussi.

---

**3** ◷◷

1) Soient $E$ un espace euclidien et $s$ un endomorphisme de $E$ qui est à la fois une isométrie vectorielle et une symétrie. Montrer que $s$ est une symétrie orthogonale.
2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que : $M^2 = I_n$ et que $M$ est symétrique. Montrer que l'endomorphisme canoniquement associé à $M$ est alors une symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

---

# 2 Matrices orthogonales

**4** ◷◷ Montrer que pour tout $A \in \mathrm{O}(n)$ :

$$\left|\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij}\right| \leqslant n \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}| \leqslant n\sqrt{n}.$$

---

**5** ◷◷ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

1) Montrer que $I_n + A$ est inversible en calculant son noyau.
2) Montrer que la matrice $(I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ est orthogonale positive.

---

**6** ◷◷ Soit $M \in \mathrm{O}(n)$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}\,\big(M - {}^tM\big) = \mathrm{Ker}\,(M - I_n) \oplus \mathrm{Ker}\,(M + I_n).$$

---

**7** ◷◷ On s'intéresse à l'équation ★ : $\mathrm{com}(M) = M$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Résoudre ★ pour : $n = 2$.
2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une solution d'★.
   a) Calculer : $\mathrm{tr}\big({}^tMM\big)$, puis déterminer le signe de $\det(M)$.
   b) Montrer que $\det(M)$ ne peut prendre que deux valeurs au plus.
3) Résoudre ★ pour : $n \neq 2$.

---

**8** On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire $(M, N) \longmapsto \mathrm{tr}\big({}^tMN\big)$.
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique de rang $r$.

1) ◷ Montrer que $\mathrm{Im}\,A$ et $\mathrm{Ker}\,A$ sont orthogonaux et stables par $A$.
2) ◷◷ Montrer qu'il existe une matrice symétrique $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}(n)$ pour lesquelles : $A = P\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$.
3) ◷ Montrer les égalités :
$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}\big(A^2\big) = \mathrm{tr}\big(B^2\big).$$
4) ◷◷ Montrer, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, que : $\mathrm{tr}(A)^2 \leqslant r\ \mathrm{tr}\big(A^2\big)$.

---

**9** ◷◷ On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$.

1) Montrer, en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la famille $(C_1, \ldots, C_n)$, que : $A = QR$ pour certaines matrices $Q \in \mathrm{O}(n)$ et $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure. Cette décomposition de $A$ est appelée sa… *décomposition QR* !
2) a) En déduire l'*inégalité de Hadamard* :
$$\big|\det(A)\big| \leqslant \prod_{k=1}^n \|C_k\|.$$
   b) À quelle condition l'inégalité de Hadamard est-elle une égalité ? Quelle interprétation géométrique ?

---

# 3 Isométries vectorielles en dimension 2

**10** ◷ Caractériser géométriquement les endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes :

1) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3\end{pmatrix}$.
2) $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3\end{pmatrix}$.
3) $\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & -5\end{pmatrix}$.
4) $\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix} -7 & -24 \\ 24 & -7\end{pmatrix}$.

---

**11** ◷◷ Soient $E$ un espace euclidien orienté de dimension 2 et $f \in \mathrm{SO}(E)$. Montrer que si $f$ possède un point fixe autre que $0_E$, alors : $f = \mathrm{Id}_E$.

---

**12** ◷◷ Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 2. Montrer que toute rotation vectorielle de $E$ est la composée de deux réflexions.

---

**13** ◷◷ Soient $E$ un espace euclidien orienté de dimension 2, $r$ une rotation de $E$ et $s$ une réflexion de $E$. Caractériser géométriquement $rsr$ et $srs$.

---

## 4 ISOMÉTRIES VECTORIELLES EN DIMENSION 3

**14** Caractériser géométriquement les endomorphismes canoniquement associés aux matrices suivantes :

**1)** $\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 4 & -7 & -4 \\ -8 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. **2)** $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

**3)** $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

---

**15** Soient $a, b \in \mathbb{R}$. On pose : $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

Pour quelles valeurs de $a$ et $b$ la matrice $M$ est-elle orthogonale ? Pour ces valeurs, caractériser géométriquement l'application linéaire canoniquement associée à $M$.

---

**16**

**1)** Soient $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3, $a \in E$ unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$. On oriente le plan $\mathrm{Vect}(a)^\perp$ par son vecteur normal $a$ et on note $r$ l'unique endomorphisme de $E$ pour lequel : $r(a) = a$ et pour lequel $r|_{\mathrm{Vect}(a)^\perp}$ est la rotation d'angle de mesure $\theta$. On dit alors que $r$ est la *rotation (vectorielle) de E d'angle de mesure $\theta$ et d'axe par $a$.*

**a)** Illustrer cette définition par un dessin.

**b)** Pourquoi est-il important de préciser « et d'axe ORIENTÉ par $a$ » ?

**c)** Déterminer la matrice de $r$ dans une base orthonormale de $E$ adaptée à la décomposition : $E = \mathrm{Vect}(a)^\perp \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

**d)** Montrer que $r$ est une isométrie vectorielle positive de $E$.

**e)** Déterminer les points fixes de $r$.

**f)** Calculer $\mathrm{tr}(r)$ en fonction de $\theta$.

**2)** Déterminer la matrice dans la base canonique de la rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et d'axe orienté par $(3, 0, 4)$.

**3)** ON ADMET — programme de spé — que toute isométrie positive en dimension 3 est une rotation au sens de la question **1)**. Caratériser géométriquement l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & -3 & 6 \\ 6 & 2 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

---

## 5 PRODUIT VECTORIEL

**17** Soient $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et $u, v \in E$ non colinéaires.

**1)** Pourquoi peut-on orienter le plan $\mathrm{Vect}(u, v)$ à l'aide du vecteur $u \wedge v$ ?

**2)** On note $r$ l'unique rotation de $\mathrm{Vect}(u, v)$, disons d'angle de mesure $\theta$, pour laquelle :

$$\frac{v}{\|v\|} = r\left(\frac{u}{\|u\|}\right).$$

Montrer qu'alors : $\|u \wedge v\| = \|u\|.\|v\| \sin\theta$.

---