## EN VRAC

**1** Soient $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$. Étudier la limite des suites de terme général :

**1)** **a)** $\dfrac{\operatorname{sh} n}{\sqrt{\operatorname{ch}(2n)}}$. **b)** $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$.

**c)** $\sqrt{\mathrm{e}^n+2^n}-\sqrt{\mathrm{e}^n+1}$.

**d)** $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$. **e)** $\dfrac{1+2\sin n}{\sqrt{n}}$. **f)** $\dfrac{n!}{n^n}$.

**2)** **a)** $\dfrac{n^\alpha}{n^\beta+1}$. **b)** $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$.

**3)** **a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$. **b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$.

**c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$. **d)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{n!}$. **e)** $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$.

---

**2** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = 1$, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 1.$$

---

**3**

**1)** Montrer que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

**2)** On pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

**a)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $\quad H_{2n}-H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

**b)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$.

---

**4** On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $\quad u_n = \dfrac{1}{2^{2n}}\dbinom{2n}{n}$.

**1)** Montrer que la suite $\left((n+1)u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**2)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

---

**5**

**1)** On pose $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\ln t)^n\,\mathrm{d}t$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**a)** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**b)** Montrer que $I_{n+1} = \mathrm{e}-(n+1)\,I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

**2)** On pose $u_n = \dfrac{(-1)^n I_n}{n!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**a)** Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**b)** En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$.

---

**6** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle de limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\lfloor u_n\rfloor$ dans chacun des cas suivants :

**1)** $\ell=+\infty$. **2)** $\ell\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. **3)** $\ell\in\mathbb{Z}$.

---

**7** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si : **1)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{1+u_n} = 0$.

**2)** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{1+u_n^2} = 0$.

---

**8** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives. Montrer que si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

---

**9** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive. On suppose $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite $\ell$.

**1)** Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans le cas où $\ell<1$.

**2)** Même question dans le cas où $\ell>1$.

**3)** Pourquoi ne peut-on pas conclure si $\ell=1$ ?

---

**10** Étudier la nature des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour lesquelles $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

---

## SUITES EXTRAITES

**11** Montrer que la suite de terme général $u_n$ n'a pas de limite :

**1)** où pour tout $n\geqslant 2$, $u_n$ est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de $n$.

**2)** où $u_n = \sin\dfrac{n^2\pi}{3}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

---

**12** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans les deux cas suivants :

**1)** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**2)** $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

---

**13** On ADMET l'irrationalité de $\pi$. Le réel $\tan n$ est alors bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la suite $(\tan n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

---

**14** Soit $\theta\in\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Montrer qu'aucune des deux suites $\left(\cos(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\sin(n\theta)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a de limite.

---

**15** On pose $u_n = \sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**1)** Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

**2)** Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n^2b^2+2an} = \dfrac{a}{b}$ pour tous $a\in\mathbb{N}$ et $b\in\mathbb{N}^*$ pour lesquels $a\leqslant b$.

**3)** Montrer que $[0,1]$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

**16** Montrer que $[-1,1]$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\cos(\ln n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

17 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si :
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geqslant N, \quad |u_n - x| < \varepsilon.$$

2) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un intervalle.

## SUITES ADJACENTES

18 Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes sont adjacentes :

1) $u_n = \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

2) $u_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) u_n$.

3) $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

19

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (*critère spécial des séries alternées*).

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Leur limite commune est appelée la *constante d'Euler* et notée $\gamma$.

b) En déduire $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

## SUITES RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$

20 Dans chacune des situations suivantes, étudier les variations de la fonction sous-jacente ou la position de son graphe par rapport à la droite d'équation $y = x$, déterminer quelques domaines stables intéressants, puis étudier en fonction de $u_0$ la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

1)

a) $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$.

b) $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

c) $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$.

d) $u_{n+1} = 1 + \frac{u_n^2}{4}$.

2) $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$.

21 On note $f$ la fonction $x \longmapsto \sqrt{2-x}$ sur $]-\infty, 2]$.

1) Pour quelles valeurs de $u_0$ peut-on définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ? On suppose désormais que $u_0$ a une telle valeur.

2) a) Déterminer les points fixes de $f$ et montrer qu'ils sont points fixes de $f \circ f$.

b) Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sont racines d'un polynôme $P$ de degré 4.

c) Vérifier que $P$ admet $-2$ pour racine et en déduire les points fixes de $f \circ f$.

3) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

22 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose que $u_0 > 0$ et que $u_{n+1} = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n)$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$ grâce au théorème de Cesàro.

23 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose que $u_0 > 0$ et que $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) On pose $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n}$ grâce au théorème de Cesàro.

## COUPLES DE SUITES RÉCURRENTES

24 Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose que $x_0 < y_0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}.$$
Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite — que l'on précisera.

25 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites pour lesquelles $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite — que l'on précisera.

26 Soient $a, b > 0$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$
Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite. Cette limite qu'on ne calculera pas est appelée la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*.

## SUITES DÉFINIES IMPLICITEMENT

**27** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels $a < b$ et $f \in \mathscr{C}\big([a,b[, \mathbb{R}\big)$. On suppose que $f$ est strictement croissante sur $[a,b[$ et que $f(a) \leqslant 0$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x) = +\infty$.

**1)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ d'inconnue $x \in [a,b[$ possède une et une seule solution $x_n$.
**2)** Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
**3)** Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

---

**28** Soient $I$ un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $I$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

— l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ possède une et une seule solution $x_n$,
— la fonction $f_n$ est strictement croissante sur $I$,
— pour tout $x \in I$ : $\quad f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

**1)** Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
**2)** Prouver proprement cette conjecture.

---

**29**

**1)** Montrer que l'équation $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ possède une et une seule solution $x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**2)** Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

---

**30**

**1)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x^n = \cos x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ possède une et une seule solution $x_n$.
**2)** Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

---

**31**

**1)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation :
$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une et une seule solution $x_n$.
**2)** Montrer que $x_n^{n+1} = 2x_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
**3)** Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.

---

**32**

**1) a)** Montrer que l'équation $\ln x = -nx$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution $x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**b)** Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
**c)** Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
**2)** On pose $y_n = nx_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
**a)** Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
**b)** Montrer que $y_n + \ln y_n = \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n}{\ln n} = 1$.

---

## BORNES SUPÉRIEURES/INFÉRIEURES

**33** Déterminer les bornes inférieure et supérieure des parties suivantes : **1)** $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

**2)** $\left\{\dfrac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$.

**3)** $\left\{\dfrac{(-1)^k k}{k+1} \;\middle|\; k \in \mathbb{N}\right\}$. **4)** $\left\{\dfrac{pq}{p^2+q^2} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{N}^*\right\}$.

**5)** $\left\{\dfrac{1}{p-q} \;\middle|\; p,q \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad p \neq q\right\}$.

---

**34** Soit $A$ une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer que : $\quad \sup\big\{|x-y| \;\;|\;\; x,y \in A\big\} = \sup A - \inf A$.

---

**35** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive. On suppose que la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Montrer que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup_{I \in \mathscr{P}_f(\mathbb{N})} \sum_{i\in I} a_i$$
où $\mathscr{P}_f(\mathbb{N})$ est l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$.

---

## EPSILONOMÉTRIE ET THÉORÈMES DE TYPE CESÀRO

**36** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\{u_n, v_n\}$ :

**1)** au moyen d'une expression simple de $\max\{x,y\}$ en fonction de $x$, $y$ et $|x-y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
**2)** en revenant à la définition de la limite.

---

**37**

**1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite complexe de limite $\ell$. Montrer que : $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \ell \quad$ (*théorème de Cesàro*) en revenant à la définition de la limite :
**a)** dans le cas où $\ell \in \mathbb{C}$.
**b)** dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est réelle et $\ell = \pm\infty$.
**2)**
**a)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$.
**b)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in [0,+\infty]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.

**c)** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

---

**38** Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement positive pour laquelle $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(\lambda_1+\ldots+\lambda_n\big)=+\infty$. Montrer que pour toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lambda_1 u_1+\ldots+\lambda_n u_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}=\ell.$$

---

**39** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives $a$ et $b$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}=ab.$$

---

## BOLZANO-WEIERSTRASS

**40** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe pour laquelle $u_{n+2}=u_{n+1}+\frac{u_n}{2^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
On pose $m_n=\max\big\{|u_n|,|u_{n+1}|\big\}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**1)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $\quad m_{n+1}\leqslant\left(1+\frac{1}{2^n}\right)m_n$.

**2)** En déduire que $m_n\leqslant \mathrm{e}^2\, m_0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une fonction $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle la suite $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**3)** Déterminer un réel $a\geqslant 0$ pour lequel pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $\quad \big|u_{\varphi(n)}-u_n\big|\leqslant\frac{a}{2^n}$.

**4)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

---

**41**

**1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au plus une valeur d'adhérence. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**2)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée pour laquelle $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(3u_n+u_{2n}\big)=1$.

**a)** Que vaut la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si elle converge ?

**b)** Soit $\ell_0$ une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note $\varphi$ une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ pour laquelle $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)}=\ell_0$.

**i)** Montrer que la suite $\big(u_{2^k\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $\ell_k\in\mathbb{C}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

**ii)** Déterminer une expression explicite de $\ell_k$ en fonction de $k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

**iii)** Montrer que la suite $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, puis en déduire $\ell_0$.

**c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

---

**42** On appelle *suite de Cauchy* (*de* $\mathbb{C}$) toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall p,q\geqslant N,\quad |u_p-u_q|<\varepsilon.$$

On appelle *ouvert* (*de* $\mathbb{C}$) toute partie de $\mathbb{C}$ qui est un voisinage de chacun de ses points et *fermé* (*de* $\mathbb{C}$) toute partie de $\mathbb{C}$ dont le complémentaire est un ouvert.

**1) a)** Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.

**b)** Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.

**c)** Réciproquement, montrer que toute suite de Cauchy est convergente.

**2) a)** Montrer que tout disque ouvert (resp. fermé) de $\mathbb{C}$ est un ouvert (resp. fermé).

**b)** Soit $D$ une partie de $\mathbb{C}$. Montrer que $D$ est fermée si et seulement si la limite d'une suite convergente d'éléments de $D$ appartient toujours à $D$.

**3)** Soient $D$ un fermé de $\mathbb{C}$ et $f:D\longrightarrow D$ une fonction *contractante*, i.e. pour laquelle :

$$\exists c\in[0,1[,\quad \forall x,y\in D,\quad \big|f(x)-f(y)\big|\leqslant c|x-y|.$$

On souhaite montrer que $f$ possède un et un seul point fixe (*théorème du point fixe de Banach*).

**a)** Montrer l'unicité d'un tel point fixe.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque pour laquelle $u_0\in D$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ tout $n\in\mathbb{N}$.

**b)** Montrer que $|u_p-u_q|\leqslant c^p\frac{|u_1-u_0|}{1-c}$ pour tous $p\in\mathbb{N}$ et $q\geqslant p$, puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

**c)** En déduire que $f$ possède un point fixe.

---

## SUITES COMPLEXES

**43**

**1) a)** Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_n}$.

**b)** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}|z_n|$.

**2) a)** Montrer que pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ :

$$|\sin x|\geqslant\frac{2}{\pi}\,|x|.$$

**b)** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente de limite 1. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\arg(z_n)$.

**3) a)** On pose $z_n=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\frac{(-1)^n\mathrm{i}\pi}{2^n}}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\arg(z_n)$.

**b)** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente dont la limite n'appartient pas à $\mathbb{R}_-$. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\arg(z_n)$.

---

**44** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe pour laquelle $z_{n+1}=\frac{z_n+|z_n|}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Étudier la convergence de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite éventuelle.

---