1 EXERCICES DIVERS

1 Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la suite de terme général :

1) a) $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}$. b) $\dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n}$.
c) $\sqrt{e^n+2^n}-\sqrt{e^n+1}$. d) $\dfrac{1+2\sin n}{\sqrt{n}}$.

2) a) $\dfrac{n!}{n^n}$. b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.
c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2}$. d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

3) a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{n!}$. b) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\lfloor kx\rfloor$ $(x\in\mathbb{R})$.

---

2 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1) Montrer que pour tout $k\geqslant 2$: $\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$.
2) En déduire que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

---

3 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $H_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $H_{2n}-H_n\geqslant\dfrac{1}{2}$.
2) En déduire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}H_n=+\infty$.

---

4 On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\dbinom{2n}{n}2^{-2n}$.

1) Montrer que la suite $\left((n+1)\,u_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$.

5

1) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $I_n=\displaystyle\int_1^{e}(\ln t)^n\,dt$.
a) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
b) Montrer que : $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
c) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n$.

2) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=(-1)^n\dfrac{I_n}{n!}$.
a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.
b) En déduire : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$.

---

6 Soit $x\geqslant 0$. On pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Montrer que : $(1-t)^k\geqslant 1-kt$ pour tous $k\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,1]$.
2) Montrer que pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![0,n]\!]$:
$$\frac{1}{k!}\geqslant\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\geqslant\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k(k-1)}{n}\right).$$
3) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:
$$S_n\geqslant\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\geqslant\left(1-\frac{x^2}{n}\right)S_n.$$
4) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

---

7 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $[0,1]$ pour lesquelles : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_nv_n=1$.
Montrer qu'alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}v_n=1$.

---

8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ dans les deux situations suivantes : 1) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{1+u_n}=0$.
2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{1+u_n^2}=0$.

---

9 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites strictement positives. On suppose que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}b_n=0$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.
Montrer qu'alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}a_n=0$.

---

10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive. On suppose $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite notée ℓ.

1) Étudier : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n$ dans le cas où : $\ell<1$.
2) Même question dans le cas où : $\ell>1$.
3) Montrer qu'on ne peut pas conclure si : $\ell=1$.

---

11 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1\geqslant 0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{n}+\dfrac{1}{n^2}$ est convergente.

---

2 SUITES EXTRAITES

12 Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.

1) pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n=\sin\dfrac{n^2\pi}{3}$.
2) pour tout $n\geqslant 2$, u_n est l'inverse du nombre de diviseurs premiers de n.
3) pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $u_n=\cos(\ln n)$.

---

13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans les deux cas suivants :

1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.
2) $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

---

14 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1) Étudier : $\lim_{n \to +\infty} u_{n^2+n}$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

2) Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec : $a < b$. Étudier : $\lim_{n \to +\infty} u_{n^2b^2+2an}$.

3) Montrer que tout élément de $[0,1]$ est la limite d'une certaine suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

15 On admet l'irrationalité de π. Le réel $\tan n$ est alors bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(\tan n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

---

16 Soit $\theta \in \mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}$. Montrer qu'aucune des deux suites $\big(\sin(n\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\cos(n\theta)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a de limite.

---

3 SUITES ADJACENTES

17 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ et $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

---

18 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

1) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

2) En déduire : $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

---

19 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ et $v_n = u_n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

---

20 Soit $\alpha > 1$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \qquad \text{et} \qquad B_n = A_n + \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

1) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $(1+x)^\alpha \geqslant 1 + \alpha x$.

2) En déduire que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

21

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. On pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (*critère spécial des séries alternées*).

2)

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

La limite : $\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right)$ est appelée la *constante d'Euler*.

b) En déduire : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

---

4 SUITES RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$

22 Étudier la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1) $u_0 = 0$ et : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$.

2) $u_0 = \frac{1}{2}$ et : $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{2}$.

3) $u_0 = 0$ et : $u_{n+1} = e^{u_n}$.

4) $u_0 = 0$ et : $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

5) $u_0 = 2$ et : $u_{n+1} = 1 + \ln u_n$.

6) $u_0 = 4$ et : $u_{n+1} = u_n - \ln u_n$.

23

1) Montrer que $[3, +\infty[$ est stable par $x \longmapsto \frac{2x^2-3}{x+2}$.

On note alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \frac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

2) **a)** Étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) En déduire : $\lim_{n \to +\infty} x_n$.

3) On souhaite améliorer le résultat de la question **2)** en procédant tout à fait différemment.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} \geqslant 2x_n - 4$.

b) En déduire que : $x_n \geqslant 2^n + \alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où α est un réel à préciser. Conclure.

---

24 Soit $\alpha \in [0,1]$. Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = (1 - u_n)\sin u_n$.

---

25 On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$.

1) Étudier la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\varepsilon_n = \frac{x_n - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \varepsilon_{n+1} \leqslant \varepsilon_n^2$.

b) Montrer que : $\varepsilon_1 \leqslant \dfrac{1}{10}$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant \varepsilon_n \leqslant \dfrac{1}{10^{2^{n-1}}}$.

---

26 ⏲⏲ On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{2-x}$ sur $]-\infty, 2]$.

1) Pour quelles valeurs de u_0 peut-on définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ » ? On suppose désormais que u_0 a une telle valeur.

2) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3) On cherche à présent les points fixes de $f \circ f$.

a) Déterminer les points fixes de f et montrer qu'ils sont points fixes de $f \circ f$.

b) Montrer que les points fixes de $f \circ f$ sont racines d'un polynôme P de degré 4.

c) Vérifier que P admet -2 pour racine.

d) En déduire les points fixes de $f \circ f$.

4) Montrer enfin que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

---

27 ⏲⏲⏲ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \left|u_n^2 - \dfrac{1}{4}\right|$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0.

---

28 ⏲⏲⏲

1) On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

a) Montrer que $]0,1]$ est stable par f.

b) Montrer que f est croissante sur $]0,1]$.

c) Montrer que f possède un et un seul point fixe sur $]0,1]$.

2) Étudier la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{\ln(1+u_n)}{\sqrt{u_n}}$.

---

29 ⏲⏲ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose : $u_0 > 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Étudier : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

3) Étudier : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n)$, puis en déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$ grâce au théorème de Césaro.

---

30 ⏲⏲ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On suppose : $u_0 > 0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + \mathrm{e}^{-u_n}$.

1) Étudier : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$.

a) Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (v_{n+1} - v_n) = 1$.

b) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\ln n}$ grâce au théorème de Césaro.

---

5 Couples de suites récurrentes

31 ⏲⏲ Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On suppose : $x_0 < y_0$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + y_n}{3} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}.$$

Montrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite — que l'on précisera.

---

32 ⏲⏲ Soit $x > 1$. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $u_0 = x$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite — que l'on précisera.

---

33 ⏲⏲ Soient $a, b > 0$. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $a_0 = a$, $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes de même limite. Cette limite, qu'on **N'**essaiera **PAS** de calculer, est appelée la *moyenne arithmético-géométrique de a et b*.

---

6 Suites définies implicitement

34 ⏲ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a < b$ et $f \in \mathscr{C}\big([a,b[, \mathbb{R}\big)$ une fonction. On suppose que :

- f est strictement croissante sur $[a, b[$,
- $f(a) \leqslant 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to b} f(x) = +\infty$.

1) Montrer que l'équation : $f(x) = n$ d'inconnue $x \in [a, b[$ possède une et une seule solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) Étudier : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n$.

---

35 ⏲ Soient I un intervalle et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- l'équation : $f_n(x) = 0$ d'inconnue $x \in I$ possède une et une seule solution x_n,
- la fonction f_n est strictement croissante sur I,
- pour tout $x \in I$: $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.

1) Conjecturer, à partir d'un dessin, le sens de monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Prouver proprement cette conjecture.

---

36 ⏲

1) Montrer que l'équation : $x + \tan x = n$ d'inconnue $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ possède une et une seule solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Étudier la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite, le cas échéant.

37 🕑🕑
1) Montrer que l'équation : $x^n = \cos x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ possède une et une seule solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Étudier la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite, le cas échéant.

38
1) 🕑 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation :
$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x = 1$$
d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une et une seule solution x_n.
2) 🕑🕑🕑 Étudier la nature de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite, le cas échéant.

39 🕑🕑
1) a) Montrer que l'équation : $\ln x = -nx$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
b) Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
c) Étudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.
2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $y_n = nx_n$.
a) Étudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.
b) Montrer que : $y_n + \ln y_n = \ln n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{y_n}{\ln n} = 1$. A fortiori : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{nx_n}{\ln n} = 1$.

7 Bornes supérieures/inférieures

40 🕑 Déterminer les bornes inférieure et supérieure des parties suivantes : 1) $\left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2) $\left\{\dfrac{1}{p-q}\right\}_{p,q\in\mathbb{Z},\,p\neq q}$. 3) $\left\{\dfrac{(-1)^k k}{k+1}\right\}_{k\in\mathbb{N}^*}$.
4) $\left\{\dfrac{pq}{p^2+q^2}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$. 5) $\left\{\dfrac{p+\sqrt{q}}{\sqrt{p}+q}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$.
6) $\left\{\dfrac{q}{2^p+q}\right\}_{p,q\in\mathbb{N}^*}$.

41 🕑🕑 Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrer l'égalité : $\sup\big\{|x-y|\big\}_{x,y\in A} = \sup A - \inf A$.

42 🕑🕑 Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose A et B *adjacentes*, i.e. que :
$$\forall (a,b) \in A\times B, \quad a \leqslant b$$
et que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, (a,b) \in A\times B/ \quad b - a < \varepsilon$.
Montrer qu'alors : $\sup A = \inf B$.

8 Exercices epsilonesques

43 🕑🕑 Étudier, EN REVENANT À LA DÉFINITION, la limite des suites de termes généraux suivants :
1) $\dfrac{n^4-1}{n^3+2n+1}$. 2) $\dfrac{\sqrt{n+\sin n}}{n^2-n}$.
3) $\dfrac{2n+5(-1)^n}{n-2}$. 4) $\dfrac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{2n+1}$.
5) $\dfrac{n^2}{n^3+n+1}$. 6) $\dfrac{n+\sin\left(n\sqrt{2}\right)}{\sqrt{n}}$.

44 🕑🕑 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$: $e_n = \lfloor u_n \rfloor$. Étudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} e_n$ dans chacun des cas suivants : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. 3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \in \mathbb{Z}$.

45 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \max\big\{u_n, v_n\big\}$ de deux manières différentes :
1) 🕑 en commençant par chercher une expression simple de $\max\big\{x,y\big\}$ en fonction de x et y pour tous $x,y \in \mathbb{R}$.
2) 🕑🕑 en revenant à la définition de la limite.

46 🕑🕑🕑 Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction injective. Montrer qu'alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = +\infty$.

9 Théorèmes de type Césaro

47
1) 🕑🕑🕑 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer l'égalité : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \ell$ (*théorème de Césaro*) en revenant à la définition de la limite :
a) dans le cas où : $\ell \in \mathbb{R}$.
b) dans le cas où : $\ell = +\infty$. On traiterait de même le cas où : $\ell = -\infty$.
2) 🕑🕑
a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer qu'alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{n} = \ell$.
b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive pour laquelle : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \big\{+\infty\big\}$. Montrer qu'alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$.
c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\dbinom{2n}{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

48 ◷◷◷ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle de limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement positive pour laquelle : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = +\infty$. Montrer qu'alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k} = \ell \quad (\textit{théorème de Césaro généralisé}).$$

---

49 ◷◷◷ Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On suppose que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante de limite $+\infty$ et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{y_n}{x_n} = \ell$ (*théorème de Stolz-Césaro*).

---

50 ◷◷◷ Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes de limites respectives a et b. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = ab.$$

---

10 Théorème de Bolzano-Weierstrass

51 ◷◷◷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{2^n}$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$: $m_n = \max\left\{|u_n|, |u_{n+1}|\right\}$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $m_{n+1} \leqslant \left(1+\frac{1}{2^n}\right) m_n$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $m_n \leqslant e^2 m_0$, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3) Montrer que : $\left|u_{\varphi(n)} - u_n\right| \leqslant \frac{4e^2 m_0}{2^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
4) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

---

52 ◷◷◷

1) Soient $\ell \in \mathbb{C}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée dont toute suite extraite convergente converge vers ℓ. Montrer qu'alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée pour laquelle : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3u_n + u_{2n}\right) = 1$.
   a) Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. On suppose que la suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\ell_0 \in \mathbb{C}$.
      i) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, la suite $\left(u_{2^k\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite $\ell_k \in \mathbb{C}$ et déterminer une expression explicite de ℓ_k en fonction de k pour tout $k\in\mathbb{N}$.
      ii) Montrer que la suite $(\ell_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, puis en déduire ℓ_0.
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente — de limite à préciser.

---

53 ◷◷◷ On appelle *suite de Cauchy* toute suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}/ \quad \forall p \geqslant N, \quad \forall q \geqslant N, \quad |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

1) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
2) a) Montrer que toute suite convergente est de Cauchy.
   b) Réciproquement, montrer que toute suite de Cauchy est convergente en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.
3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a \leqslant b$ et $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction *contractante*, i.e. telle que :

$$\exists c \in [0,1[/ \quad \forall x, y \in [a,b], \quad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant c|x-y|.$$

On souhaite montrer que f possède alors un et un seul point fixe (*théorème du point fixe de Banach*).
   a) Montrer l'unicité d'un tel point fixe.
   b) Montrer que f est continue sur $[a,b]$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque pour laquelle tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.
   c) Grâce à une simplification télescopique, montrer que : $|u_p - u_q| \leqslant c^p \frac{|u_1 - u_0|}{1-c}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.
   d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
   e) En déduire que f possède un point fixe.
   f) Pourquoi le résultat demeure-t-il vrai si l'on remplace $[a,b]$ par $[a,+\infty[$, $]-\infty,b]$ ou $\mathbb{R}$ mais pas par $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$, $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,b[$?

---

11 Suites complexes

54 ◷◷ Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$. Exprimer z_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis étudier la convergence de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

---

55 ◷◷

1) Soient $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Étudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n e^{i\theta_n}$.
2) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente de limite 1.
   a) Étudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|$.
   b) Montrer que : $|\sin x| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
   c) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg(z_n)$.
3) Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe convergente de limite non nulle. Étudier les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \arg(z_n)$.
