

1 CALCULS DIRECTS DE LIMITES

- 1** Calculer les limites suivantes :
- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$.
 - 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3+1})$.
 - 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2})$.
 - 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n} \quad (m, n \in \mathbb{N})$.

- 2** Calculer, si elles existent, les limites suivantes :
- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$.
 - 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x+1)}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{\ln(e^x+1)}$.
 - 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\operatorname{ch} x + x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{\operatorname{ch} x + x^2}$.
 - 4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + \sin x)^2$. 5) $\lim_{x \rightarrow 1} (\ln x)(\ln \ln x)$.
 - 6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin e^x + e^{\sin x} + x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. 7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.
 - 8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x^2}}{e^{\beta x^3} + e^{\gamma x}} \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$.

- 3** Calculer les limites suivantes :
- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{\tan x}$.
 - 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sin x}$. 4) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\beta - 1}{x^\alpha - 1} \quad (\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R})$.
 - 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin \sqrt{x}}$. 6) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$.
 - 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^2 \ln(1+2x) - x^4}$.
 - 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x}$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

- 4** Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite :
- 1) $x \mapsto \sin(\cos x)$ en $+\infty$.
 - 2) $x \mapsto \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)$ en 0.
 - 3) $x \mapsto \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ en $+\infty$.
 - 4) $x \mapsto \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ en 0.

2 DÉFINITIONS DE LA LIMITE

- 5** Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in D$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. On suppose que : $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$. Montrer proprement que :
- 1) $\lim_a (f + g) = \ell + \ell'$. 2) $\lim_a f g = \ell \ell'$.
 - 3) si $\ell \neq 0$: $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.

- 6** Déterminer, en revenant à la définition de la limite :

- 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2-4x+1}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{(x+1)^2}$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \lfloor \sqrt{x} \rfloor + 1}{\lfloor x \rfloor + x^2 - 2}$.

3 PROBLÈMES FONCTIONNELS

- 7** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $|f(x) - f(y)| \leq \frac{x}{y}$.

- 8** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodiques qui possèdent une limite en $+\infty$.

- 9** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

- 1) Que peut valoir $f(1)$? Conclure dans le cas où : $f(1) = 0$.
- 2) On suppose désormais : $f(1) \neq 0$.
 - a) Montrer que : $f|_{\mathbb{N}} = \operatorname{Id}_{\mathbb{N}}$, puis que : $f|_{\mathbb{Z}} = \operatorname{Id}_{\mathbb{Z}}$ et enfin que : $f|_{\mathbb{Q}} = \operatorname{Id}_{\mathbb{Q}}$.
 - b) Montrer que f est positive sur \mathbb{R}_+ , puis que f est croissante sur \mathbb{R} .
 - c) En déduire que : $f = \operatorname{Id}_{\mathbb{R}}$.

- 10** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, non identiquement nulle et telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

- 1) Montrer que : $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Que vaut $\lim_0 f$?
- 2) Résoudre l'équation : $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que f est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .