1 Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $a \in D$ et $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$. Montrer proprement que si $\lim\limits_a f = \ell$ et $\lim\limits_a g = \ell'$, alors :

1) $\lim\limits_a (f+g) = \ell + \ell'$. **2)** $\lim\limits_a fg = \ell\ell'$.

3) $\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell}$ si $\ell \neq 0$.

CALCULS DIRECTS DE LIMITES

2 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+x} - \sqrt{x^3+1}\right)$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$.

3) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x^m} - \sqrt{1-x^m}}{x^n}$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

---

3 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\operatorname{ch} x + x^2}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{\operatorname{ch} x + x^2}$.

4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln x + \sin x\right)^2$. **5)** $\lim\limits_{x\to1} (\ln x)(\ln\ln x)$.

6) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin e^x + e^{\sin x} + x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. **7)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

8) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x^2} + x}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

---

4 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. **2)** $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{2^x - 1}{\sin(2x)}$.

3) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^\beta - 1}{x^\alpha - 1}$ $(\alpha \in \mathbb{R}^*, \beta \in \mathbb{R})$.

4) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3x)}{x^2\ln(1+2x) - x^4}$.

5) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$ et $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$.

6) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^\alpha - 1}{\ln x}$ et $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^\alpha - 1}{\ln x}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

---

5 Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite : **1)** $x \longmapsto \sin(\cos x)$ en $+\infty$.

2) $x \longmapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$ en $+\infty$.

3) $x \longmapsto \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ en 0.

---

6 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction possédant une limite $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ en $+\infty$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^x$ dans le cas où $\ell \neq 1$.

2) Trouver un exemple de fonction f pour laquelle $\ell = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)^x = 0$ (resp. 2, resp. $+\infty$).

PROBLÈMES FONCTIONNELS

7 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y > 0$: $\left|f(x) - f(y)\right| \leqslant \dfrac{x}{y}$.

---

8 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ périodiques qui possèdent une limite en $+\infty$.

---

9 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que la fonction $x \longmapsto \lim\limits_{x^-} f$ est croissante.

---

10 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

1) Que peut valoir $f(1)$? Conclure dans le cas où $f(1) = 0$.

2) On suppose désormais $f(1) \neq 0$.

a) Montrer que $f_{|\mathbb{Q}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.

b) Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$, puis que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

---

11 Soit $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, non identiquement nulle et telle que pour tous $x, y > 0$:

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

1) Montrer que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$. Que vaut $\lim\limits_0 f$?

2) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
