1 CALCULS DIRECTS DE LIMITES

1 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$.
2) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^3+x}-\sqrt{x^3+1}\right)$.
3) $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$.
4) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$ $(m,n\in\mathbb{N})$.

2 Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to0} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$ et $\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.
2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{\ln(e^x+1)}$.
3) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\operatorname{ch} x+x^2}$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{\operatorname{ch} x+x^2}$.
4) $\lim_{x\to+\infty} \left(\ln x+\sin x\right)^2$. 5) $\lim_{x\to1} (\ln x)(\ln\ln x)$.
6) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sin e^x+e^{\sin x}+x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. 7) $\lim_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.
8) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\alpha x^2}}{e^{\beta x^3}+e^{\gamma x}}$ $(\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R})$.

3 Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$. 2) $\lim_{x\to0} \dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{\tan x}$.
3) $\lim_{x\to0} \dfrac{2^x-1}{\sin x}$. 4) $\lim_{x\to1} \dfrac{x^\beta-1}{x^\alpha-1}$ $(\alpha\in\mathbb{R}^*,\beta\in\mathbb{R})$.
5) $\lim_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{\sin\sqrt{x}}$. 6) $\lim_{x\to1} \dfrac{\sin(3\pi x)}{\sin(4\pi x)}$.
7) $\lim_{x\to0} \dfrac{\sin x}{x^2\ln(1+2x)-x^4}$.
8) $\lim_{x\to0} \dfrac{x^\alpha-1}{\ln x}$ et $\lim_{x\to1} \dfrac{x^\alpha-1}{\ln x}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$.

4 Montrer que les fonctions suivantes n'ont pas de limite :

1) $x\longmapsto \sin(\cos x)$ en $+\infty$.
2) $x\longmapsto \sin\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ en 0.
3) $x\longmapsto \dfrac{x^x}{\lfloor x\rfloor^{\lfloor x\rfloor}}$ en $+\infty$.
4) $x\longmapsto \cos\left(e^{\frac{1}{x^2}}\right)$ en 0.

2 DÉFINITIONS DE LA LIMITE

5 Soient $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:D\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions, $a\in D$ et $\ell,\ell'\in\mathbb{R}$. On suppose que : $\lim_a f=\ell$ et $\lim_a g=\ell'$. Montrer proprement que :

1) $\lim_a (f+g)=\ell+\ell'$. 2) $\lim_a fg=\ell\ell'$.
3) si $\ell\neq0$: $\lim_a \dfrac{1}{f}=\dfrac{1}{\ell}$.

6 Déterminer, en revenant à la définition de la limite :

1) $\lim_{x\to1} \dfrac{x+2}{x^2-4x+1}$. 2) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+\sin x}{(x+1)^2}$.
3) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor+1}{\lfloor x\rfloor+x^2-2}$.

3 PROBLÈMES FONCTIONNELS

7 Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ telles que pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+^*$: $\left|f(x)-f(y)\right|\leqslant\dfrac{x}{y}$.

8 Déterminer toutes les fonctions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ périodiques qui possèdent une limite en $+\infty$.

9 Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tous $x,y\in\mathbb{R}$:

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \quad\text{et}\quad f(xy)=f(x)f(y).$$

1) Que peut valoir $f(1)$? Conclure dans le cas où : $f(1)=0$.
2) On suppose désormais : $f(1)\neq0$.
   a) Montrer que : $f|_{\mathbb{N}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$, puis que : $f|_{\mathbb{Z}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{Z}}$ et enfin que : $f|_{\mathbb{Q}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$.
   b) Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$, puis que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   c) En déduire que : $f=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

10 Soit $f:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante, non identiquement nulle et telle que pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f(xy)=f(x)+f(y).$$

1) Montrer que : $\lim_{+\infty} f=+\infty$. Que vaut $\lim_0 f$?
2) Résoudre l'équation : $f(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$, puis en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.