1 Manipulation des matrices

1 ◷ Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
1) Montrer que : $A^2 = \mathrm{tr}(A)\,A - \det(A)\,I_2$.
2) Exprimer $\det(A)$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}\big(A^2\big)$.
3) En déduire que si : $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\big(A^2\big) = 0$, alors : $A^2 = 0$.

---

2 ◷ Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A-B) B^{k-i-1}.$$

---

3 ◷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $M(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\,x & \mathrm{sh}\,x \\ \mathrm{sh}\,x & \mathrm{ch}\,x \end{pmatrix}$. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\exists\, z \in \mathbb{R}/ \quad M(x)M(y) = M(z).$$

---

4 ◷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si : $AB = BA$.

---

5 ◷◷ On dit qu'une matrice carrée est *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

---

6 ◷◷ On dit qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* si : $M^p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$. Le plus petit de ces entiers p est alors appelé l'*indice de nilpotence de M*.
1) Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes de même taille, QUI COMMUTENT, sont aussi nilpotentes.
2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice de nilpotence p. Montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

---

7 Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note A la matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \ldots, a_n$.
1) ◷ Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la diagonale de $AM - MA$ est nulle.
2) ◷◷ Montrer que $\big\{AM - MA\big\}_{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

---

8 ◷◷ Déterminer tous les couples $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ pour lesquels : $AB - BA = I_n$.

---

9 ◷◷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre en fonction de A et B l'équation matricielle : $X + \mathrm{tr}(X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

---

10 ◷◷◷ Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques.
1) Montrer que :

$$\mathrm{tr}\Big({}^t(AB - BA)(AB - BA)\Big) = 2\Big(\mathrm{tr}\big(A^2B^2\big) - \mathrm{tr}\big((AB)^2\big)\Big).$$

2) En déduire l'inégalité : $\mathrm{tr}\big((AB)^2\big) \leqslant \mathrm{tr}\big(A^2B^2\big)$.

---

11 ◷◷◷ Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la matrice $\big(a_{n+1-i,n+1-j}\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$.
2) Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$\widetilde{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{A}^{-1} = \widetilde{A^{-1}}.$$

---

12 ◷◷◷
1) Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On suppose que : ${}^tXY \neq -1$. Montrer qu'alors $I_n + X\,{}^tY$ est inversible et que :

$$\big(I_n + X\,{}^tY\big)^{-1} = I_n - \frac{X\,{}^tY}{1 + {}^tYX}.$$

2) Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On suppose que : ${}^tXA^{-1}Y \neq -1$. Montrer que $A + X\,{}^tY$ est inversible avec : $\big(A + X\,{}^tY\big)^{-1} = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}X\,{}^tYA^{-1}}{1 + {}^tYA^{-1}X}$ (*formule de Sherman-Morrison*).

---

2 Calculs de puissances

13 ◷◷ Calculer les puissances des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$. 9) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$.

---

14 ◷◷ Calculer les puissances de la matrice $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.

---

15 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $u_0 = w_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & 2u_n & + & v_n & & \\ v_{n+1} & = & u_n & + & 2v_n & & \\ w_{n+1} & = & u_n & + & v_n & + & w_n. \end{array}\right.$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

---

16 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $u_0 = v_0 = 0$ et $w_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} u_{n+1} & = & u_n & + & v_n & + & w_n \\ v_{n+1} & = & u_n & & & + & w_n \\ w_{n+1} & = & & & v_n. & & \end{array}\right.$$

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

---

3 Résolution de systèmes linéaires

17 Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

1) $\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 2 \\ 3x & - & 5y & = & 1. \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & 3y & - & 7z & = & 10 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 6. \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & 4z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 3. \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2. \end{array}\right.$

---

18 Pour quels triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ le système linéaire : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & ay & + & cz & = & 0 \\ bx & + & cy & - & 3z & = & 1 \\ ax & + & 2y & + & bz & = & 5 \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ admet-il $(3,-1,2)$ pour solution ?

---

19 Pour quels triplets $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ le système linéaire : $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & 2z & = & a \\ x & & & + & z & = & b \\ 2x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}\right.$ d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est-il compatible ?

---

20 Quel est l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 pour lequel : $P(1) = 2$, $P(2) = 1$ et $P(3) = 2$?

---

21 Résoudre pour tout $p \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:

1) $\left\{\begin{array}{ccccc} 2px & + & y & = & 1 \\ 2x & + & py & = & p. \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & py & + & 2z & = & 1 \\ px & + & y & + & 2z & = & p \\ x & + & 2py & + & 3z & = & 0. \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ccccccc} px & + & py & + & 4z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & pz & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0. \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 1-p \\ px & + & (1+p)y & + & (1+p)z & = & p-p^2 \\ px & + & (1-p)y & + & (1-p)z & = & p^2. \end{array}\right.$

5) $\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & py & + & 6z & = & 6 \\ -x & + & 3y & + & (p-3)z & = & 0. \end{array}\right.$

---

4 Matrices inversibles

22 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pourquoi la notation fractionnaire $\dfrac{A}{B}$ est-elle interdite ?

---

23 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

1) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **f)** $\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ z & 1 & \overline{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$ $(z \in \mathbb{C})$.

2) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.
