1 MANIPULATIONS FORMELLES

1 ◷ Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

1) Montrer que : $A^2 = \mathrm{tr}(A)\,A - \det(A)\,I_2$.
2) Exprimer $\det(A)$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}\big(A^2\big)$.
3) En déduire que si : $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\big(A^2\big) = 0$, alors : $A^2 = 0$.

---

2 ◷ Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$A^k - B^k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i (A-B) B^{k-i-1}.$$

---

3 ◷ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $M(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}\, x & \mathrm{sh}\, x \\ \mathrm{sh}\, x & \mathrm{ch}\, x \end{pmatrix}$. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\exists\, z \in \mathbb{R}/ \quad M(x)M(y) = M(z).$$

---

4 ◷ On définit une suite de matrices $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dites *matrices de Walsh*, en posant : $W_0 = (1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_{n+1} = \begin{pmatrix} W_n & W_n \\ W_n & -W_n \end{pmatrix}$ (matrice par blocs). Préciser la taille de W_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et calculer W_n^2.

---

5 ◷ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ symétriques. Montrer que AB est symétrique si et seulement si : $AB = BA$.

---

6 ◷◷ On dit qu'une matrice carrée est *stochastique* si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques est encore une matrice stochastique.

---

7 ◷◷ Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse sous forme d'une matrice par blocs.

---

8 ◷◷ On dit que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *nilpotente* si pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$: $M^p = 0$. Le plus petit de ces entiers p est alors appelé l'*indice de nilpotence de M*.

1) Montrer que la somme et le produit de deux matrices nilpotentes de même taille, QUI COMMUTENT, sont aussi nilpotentes.
2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice de nilpotence p. Montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

---

9 Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts. On note A la matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \ldots, a_n$.

1) ◷ Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la diagonale de $AM - MA$ est nulle.
2) ◷◷ Montrer que $\big\{AM - MA\big\}_{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

---

10 ◷◷ Déterminer tous les couples $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ pour lesquels : $AB - BA = I_n$.

---

11 ◷◷ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre en fonction de A et B l'équation matricielle : $X + \mathrm{tr}(X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

---

12 ◷◷◷ Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques.

1) Montrer que :

$$\mathrm{tr}\big({}^t(AB-BA)(AB-BA)\big) = 2\Big(\mathrm{tr}\big(A^2B^2\big) - \mathrm{tr}\big((AB)^2\big)\Big).$$

2) En déduire l'inégalité : $\mathrm{tr}\big((AB)^2\big) \leqslant \mathrm{tr}\big(A^2B^2\big)$.

---

13 ◷◷◷ Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la matrice $\big(a_{n+1-i,n+1-j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$.
2) Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$: $\widetilde{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\widetilde{A}^{-1} = \widetilde{A^{-1}}$.

---

14 ◷◷◷

1) Soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On suppose que : ${}^tXY \neq -1$. Montrer qu'alors $I_n + X{}^tY$ est inversible et que :

$$\big(I_n + X{}^tY\big)^{-1} = I_n - \frac{X{}^tY}{1 + {}^tYX}.$$

2) Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $X, Y \in \mathbb{R}^n$. On suppose que : ${}^tXA^{-1}Y \neq -1$. Montrer que $A + X{}^tY$ est inversible avec : $\big(A + X{}^tY\big)^{-1} = A^{-1} - \dfrac{A^{-1}X{}^tYA^{-1}}{1 + {}^tYA^{-1}X}$ (*formule de Sherman-Morrison*).

---

2 CALCULS DE PUISSANCES

15 ◷◷ Calculer les puissances des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
3) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.
4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$. **9)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$.

---

16 Calculer les puissances de $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$.

17

1) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $u_0 = w_0 = 1$, $v_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + w_n. \end{cases}$

Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de n.

2) Même question avec : $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = 1$ et : $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + w_n \\ w_{n+1} = v_n. \end{cases}$

---

3 RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

18 Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

1) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 3x - 5y = 1. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 3y - 7z = 10 \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3. \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ x + 2y + z = 2. \end{cases}$

---

19 Pour quels triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système linéaire : $\begin{cases} x + ay + cz = 0 \\ bx + cy - 3z = 1 \\ ax + 2y + bz = 5 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ admet-il $(3, -1, 2)$ pour solution ?

---

20 Pour quels triplets $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ le système linéaire : $\begin{cases} x + y + 2z = a \\ x + z = b \\ 2x + y + 3z = c \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ est-il compatible ?

---

21 Quel est l'unique polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 pour lequel : $P(1) = 2$, $P(2) = 1$ et $P(3) = 2$?

---

22 Résoudre pour tout $p \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

1) $\begin{cases} 2px + y = 1 \\ 2x + py = p. \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + py + 2z = 1 \\ px + y + 2z = p \\ x + 2py + 3z = 0. \end{cases}$

3) $\begin{cases} px + py + 4z = 1 \\ 2x + y + pz = 1 \\ x + 2y + z = 0. \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y + z = 1 - p \\ px + (1+p)y + (1+p)z = p - p^2 \\ px + (1-p)y + (1-p)z = p^2. \end{cases}$

5) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + py + 6z = 6 \\ -x + 3y + (p-3)z = 0. \end{cases}$

---

4 MATRICES INVERSIBLES

23 Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pourquoi la notation fractionnaire $\dfrac{A}{B}$ est-elle interdite ?

---

24 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

1) a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 13 & 2 & 1 & 9 \\ 7 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. **f)** $\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ z & 1 & \overline{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$ $(z \in \mathbb{C})$.

2) Les matrices suivantes sont carrées de taille n.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.
