## MANIPULATIONS FORMELLES

**1** On dit qu'une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est *stable par produit* si $AB \in \mathscr{A}$ pour tous $A, B \in \mathscr{A}$.

1) Montrer que l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$, $x$ décrivant $\mathbb{R}$, est stable par produit.
2) On note $J$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que $\left\{aI_n + bJ \mid \ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ est stable par produit.
3) Soit $\mathscr{S}$ une partie de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ stable par produit. Montrer que les éléments de $\mathscr{S}$ commutent deux à deux.
4) On dit qu'une matrice carrée est *stochastique* si ses coefficients sont positifs et si la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit.

---

**2** Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse sous forme d'une matrice par blocs.

---

**3**

1) Comparer $\det(AB)$ et $\det(A)\det(B)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
2) Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Montrer que $A^2$ est une combinaison linéaire de $I_2$ et $A$ dont on exprimera les coefficients en fonction de $\operatorname{tr}(A)$ et $\det(A)$.

---

**4** On pose pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \textit{(symbole de Kronecker)}$$

et on note $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la famille des matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Simplifier le produit $E_{ij}E_{kl}$ pour tous $i, j, k, l \in [\![1, n]\!]$.

---

**5**

1) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes qui commutent. Montrer que $AB$ et $A+B$ sont elles aussi nilpotentes.
2) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. Montrer que $I_n - M$ est inversible et déterminer son inverse.

---

**6** Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{T}_p$ l'ensemble des matrices carrées $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour lesquelles pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ : $\quad j < i + p \quad \Longrightarrow \quad m_{ij} = 0$.

1) Quelle est concrètement la forme des matrices de $\mathscr{T}_p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$ ?
2) Montrer que $AB \in \mathscr{T}_{p+q}$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{T}_p$ et $B \in \mathscr{T}_q$.
3) En déduire que toute matrice de $\mathscr{T}_1$ est nilpotente.

---

**7** Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ distincts. On note $A$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $a_1, \ldots, a_n$.

1) Montrer que pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la diagonale de $AM - MA$ est nulle.
2) Montrer que $\left\{AM - MA \mid \ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})\right\}$ est l'ensemble des matrices de diagonale nulle.

---

**8** Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la matrice $\left(a_{n+1-i,n+1-j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

1) Montrer que $\widetilde{AB} = \widetilde{A}\widetilde{B}$ pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
2) Montrer que pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ : $\quad \widetilde{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\quad \widetilde{A}^{-1} = \widetilde{A^{-1}}$.

---

**9** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques.

1) Montrer que :
$$\operatorname{tr}\Big((AB{-}BA)^\top (AB{-}BA)\Big) = 2\Big(\operatorname{tr}\big(A^2B^2\big) - \operatorname{tr}\big((AB)^2\big)\Big).$$
2) En déduire que $\operatorname{tr}\big((AB)^2\big) \leqslant \operatorname{tr}\big(A^2B^2\big)$.

---

**10** Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Résoudre en fonction de $A$ et $B$ l'équation matricielle $X + \operatorname{tr}(X)A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

---

**11** On pose $\|A\| = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{ij}|$ pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

1) Montrer que pour tous $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ :
$$\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\| \quad \text{et} \quad \|AB\| \leqslant \|A\| \times \|B\|.$$
2) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $k \in \mathbb{N}^*$ avec $\|A\| \neq \|B\|$.
   a) Montrer que $A^k - B^k = \sum\limits_{i=0}^{k-1} A^i(A - B)B^{k-i-1}$.
   b) En déduire que : $\dfrac{\left\|A^k - B^k\right\|}{\|A - B\|} \leqslant \dfrac{\|A\|^k - \|B\|^k}{\|A\| - \|B\|}$.

---

## CALCULS DE PUISSANCES

**12** Calculer les puissances des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. $\qquad$ 2) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\quad (\theta \in \mathbb{R})$.

3) a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$. $\qquad$ 5) $\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ $\quad (a, b, c \in \mathbb{C})$.

6) a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\qquad$ b) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

---

**13** On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que $A^2$ est combinaison linéaire de $I_3$ et $A$, i.e. que $A^2 = \lambda I_3 + \mu A$ pour certains $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

**2)** En déduire l'existence de deux suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $A^k = a_k I_3 + b_k A$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**3)** Déterminer une expression explicite de $a_k$ et $b_k$, puis $A^k$, en fonction de $k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**4)** Adapter la technique précédente pour calculer les puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$.

---

**14** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

**1)** Résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. En déduire trois vecteurs $X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{R}^3$ ainsi que trois réels distincts $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ pour lesquels $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ et $AX_i = \lambda_i X_i$ pour tout $i \in [\![1,3]\!]$.

On note $P$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de colonnes $X_1, X_2, X_3$.

**2)** Montrer que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$.

**3)** Déterminer SANS CALCUL une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ pour laquelle $AP = PD$.

**4)** En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ une expression de $A^k$ en fonction de $k$, $P$ et $D$, puis une expression explicite de $A^k$ en fonction de $k$ seulement.

**5)** Adapter la technique précédente aux matrices :

**a)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. **b)** $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

---

**15** On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 0$, $w_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} u_{n+1} & = & 2u_n & + & v_n & + & w_n \\ v_{n+1} & = & u_n & + & 2v_n & + & w_n \\ w_{n+1} & = & u_n & + & v_n & + & 2w_n. \end{array} \right.$$

Reformuler cette définition en termes matriciels, puis déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ une expression explicite de $u_n$, $v_n$ et $w_n$ en fonction de $n$.

---

## RÉSOLUTION DE SYSTÈMES LINÉAIRES

**16** Résoudre les systèmes linéaires suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :

**1)** $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 2 \\ 3x & - & 5y & = & 1. \end{array} \right.$

**2)** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 6 \\ x & - & 3y & - & 7z & = & 10 \\ x & + & 3y & + & 4z & = & 6. \end{array} \right.$

**3)** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & 5y & - & 3z & = & 1 \\ 3x & + & 6y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & 7y & + & z & = & 1. \end{array} \right.$

**4)** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & + & 2t & = & 1 \\ x & & & - & z & + & t & = & -1 \\ x & + & 2y & + & z & + & t & = & 1. \end{array} \right.$

---

**17** Résoudre pour tout $p \in \mathbb{R}$ les systèmes linéaires suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :

**1)** $\left\{ \begin{array}{rcrcr} 2px & + & y & = & p \\ 2x & + & py & = & p. \end{array} \right.$

**2)** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & py & + & 2z & = & 1 \\ px & + & y & + & 2z & = & 1 \\ x & + & 2py & + & 3z & = & 0. \end{array} \right.$

**3)** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} px & + & py & + & 4z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & pz & = & 1 \\ x & + & 2y & + & z & = & 0. \end{array} \right.$

**4)** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 1-p \\ px & + & (1+p)y & + & (1+p)z & = & p-p^2 \\ px & + & (1-p)y & + & (1-p)z & = & p^2. \end{array} \right.$

**5)** $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & + & py & + & 6z & = & 6 \\ -x & + & 3y & + & (p-3)z & = & 0. \end{array} \right.$

---

## MATRICES INVERSIBLES

**18** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, déterminer leur inverse.

**1)** **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$. **b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**c)** $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. **d)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

**e)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **f)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**2)** $\begin{pmatrix} 1 & \overline{z} & \overline{z}^2 \\ z & 1 & \overline{z} \\ z^2 & z & 1 \end{pmatrix}$ $(z \in \mathbb{C})$.

**3)** **a)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.

**b)** $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$. **c)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{[n]}$.

---