COSINUS, SINUS, TANGENTE

1

1) Calculer $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$, puis $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$ et $\tan\frac{\pi}{12}$.

2) Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$, puis $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

---

2 Résoudre graphiquement les inéquations suivantes d'inconnue x : 1) $\cos x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. 2) $\sin x > -\frac{1}{2}$.

3) $|\tan x| \leqslant 1$. 4) $\ln\tan\frac{\pi x}{2} > 0$.

---

3 Montrer que : $\left|\sin(nx)\right| \leqslant n\,|\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

---

4 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :

1) $\cos(3x) = \sin x$. 2) $\cos x + \sin x = 1 + \tan x$.
3) $\sin x + \sin(2x) = 0$. 4) $\tan(2x) = 3\tan x$.
5) $2\sin x + \sin(3x) = 0$. 6) $3\tan x = 2\cos x$.
7) $\cos x = \sqrt{3}\sin x$. 8) $2\cos(4x) + \sin x = \sqrt{3}\cos x$.

---

5 Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{2^k}\sin\frac{3\pi}{2^k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis déterminer son signe.

---

6 Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$2\cos\frac{\pi}{2^n} = \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}} \qquad (n-1 \text{ symboles } \sqrt{\cdot}).$$

7

1) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x > x$.

2) Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{x}{\sin x}$ est bijective de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur son image que l'on précisera.

---

8 Montrer que : $\sin x \geqslant x - \frac{x^2}{\pi}$ pour tout $x \in [0, \pi]$ en commençant par travailler sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et en concluant ensuite sans nouvelle étude de fonction.

---

9 Soient $s, c \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que :

$$s' = c, \quad c' = -s, \quad s(0) = 0 \quad \text{et} \quad c(0) = 1.$$

1) On fixe $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer, grâce à la fonction :
$$t \longmapsto s(t+x)c(t+y) - c(t+x)s(t+y),$$
que : $s(x-y) = s(x)c(y) - c(x)s(y)$.

2) En déduire que s est impaire et c paire.

3) En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

4) En déduire que $c^2 + s^2 = 1$.

---

10 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que $f'' + f \geqslant 0$. Montrer, grâce à la fonction $t \longmapsto f'(t)\sin(t-x) - f(t)\cos(t-x)$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) + f(x+\pi) \geqslant 0$.

11

1) a) Montrer que : $\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$ pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Que vaut $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$?

c) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$:
$$\prod_{k=1}^{+\infty} \cos\frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x},$$

2) a) Composer **1)a)** par la fonction logarithme, puis dériver.

b) En déduire que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}\tan\frac{x}{2^k} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x}.$$

3) Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:
$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \tan^2\frac{x}{2^k}\right) = \frac{x}{\tan x}.$$

---

12 On pose $P_n(x) = \prod_{k=0}^{n} \sin\left(2^k x\right)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1) Exprimer $P_1(x)$ en fonction de $\cos x$, puis montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left|P_1(x)\right| \leqslant \frac{4}{3\sqrt{3}}$.

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\left|\sin^2 x \sin(2x)\right| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3) a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$P_{n+1}(x)^2 = \sin^2 x \sin(2x) P_{n-1}(4x) P_n(2x).$$

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$:
$$\left|P_n(x)\right| \leqslant \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n.$$

ARCMACHINS

13

1) Résoudre l' équation $\sin x = \frac{1}{4}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

2) Résoudre le système : $\cos x = -\frac{3}{5}$ et $\sin x = \frac{4}{5}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

14

1) Simplifier : a) $\operatorname{Arccos}\cos\frac{8\pi}{3}$.
b) $\operatorname{Arcsin}\sin\frac{17\pi}{6}$. c) $\operatorname{Arctan}\tan\left(-\frac{11\pi}{4}\right)$.

d) $\operatorname{Arcsin}\cos\frac{7\pi}{4}$. **e)** $\operatorname{Arccos}\sin\frac{17\pi}{5}$.

2) Tracer le graphe des fonctions :
a) $x \longmapsto \operatorname{Arctan}\tan x$. **b)** $x \longmapsto \operatorname{Arccos}\cos x$.
c) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\sin x$.

---

15 Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $\operatorname{Arctan} x \geqslant \frac{x}{x^2+1}$.

---

16 Étudier les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité des fonctions suivantes :
1) $x \longmapsto x\operatorname{Arctan}\frac{1}{x}$. **2)** $x \longmapsto x\operatorname{Arctan}\frac{1}{x-1}$.

17
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\cos\operatorname{Arctan} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin\operatorname{Arctan} x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
2) Simplifier de même les expressions suivantes :
a) $\sin\left(2\operatorname{Arccos} x\right)$. **b)** $\sin\left(2\operatorname{Arctan} x\right)$.
c) $\tan\left(\operatorname{Arccos} x\right)$. **d)** $\cos\left(3\operatorname{Arccos} x\right)$.
3) Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) = \operatorname{Arcsin} x$ d'inconnue $x \in [-1,1]$.

---

18 Simplifier par une technique de dérivation les expressions suivantes :
1) $\operatorname{Arccos}(-x) + \operatorname{Arccos} x$. **2)** $\operatorname{Arctan}\frac{1+x}{1-x}$.
3) $\operatorname{Arctan}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **4)** $\operatorname{Arccos}\operatorname{th} x + 2\operatorname{Arctan} e^x$.
5) $\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$. **6)** $\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
7) $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2x^2} + \operatorname{Arctan}\frac{x-1}{x} - \operatorname{Arctan}\frac{x}{x+1}$.
8) $\operatorname{Arctan} e^x - \operatorname{Arctan}\operatorname{th}\frac{x}{2}$.

19
1) Montrer que : $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{3}$.
2) Montrer l'égalité : $2\operatorname{Arccos}\frac{3}{4} = \operatorname{Arccos}\frac{1}{8}$.
3) Calculer : $\operatorname{Arctan}\frac{1}{2} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{5} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{8}$.
4)
a) Calculer $\tan\left(2\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right)$, puis $\tan\left(4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5}\right)$.
b) En déduire la *formule de Machin* :
$$\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{Arctan}\frac{1}{5} - \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}.$$
La *formule de Machin*, découverte par John Machin en 1706, a longtemps servi à calculer les premières décimales de π car on sait approximer facilement les arctangentes comme nous le verrons plus tard. Le résultat de la question **1)** est appelé quant à lui une *formule du type de Machin*. Il en existe beaucoup d'autres, par exemple : $\frac{\pi}{4} = 2\operatorname{Arctan}\frac{1}{3} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{7}$.

20
1) Simplifier $\operatorname{Arctan}\operatorname{sh} x + \operatorname{Arccos}\operatorname{th} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation $\operatorname{th} x = \frac{5}{13}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3) En déduire que : $\operatorname{Arctan}\frac{5}{12} + \operatorname{Arccos}\frac{5}{13} = \frac{\pi}{2}$.

---

21 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :
1) $\operatorname{Arcsin}(2x) = \operatorname{Arccos} x$. **2)** $\operatorname{Arcsin}\tan x = x$.
3) $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}(2x) = \frac{\pi}{4}$.
4) $\operatorname{Arctan}\frac{x-1}{x-2} + \operatorname{Arctan}\frac{x+1}{x+2} = \frac{\pi}{4}$.
5) $\operatorname{Arcsin}(x+1) - \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{6}$.

22
1) Simplifier $\operatorname{Arctan}(k+1) - \operatorname{Arctan} k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2) En déduire la limite $\sum_{k=0}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{1}{k^2+k+1}$.

---

23 On appelle *suite de Fibonacci* la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$.
1) Montrer que : $F_{n+1}^2 - F_nF_{n+2} = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n}} = \operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n+1}} + \operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n+2}}.$$
3) En déduire la limite $\sum_{n=0}^{+\infty}\operatorname{Arctan}\frac{1}{F_{2n+1}}$.

FORMES TRIGONOMÉTRIQUES

24 Résoudre pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$ l'équation :
$$\left(z^2-2z\right)\cos^2\varphi + 1 = 0 \quad \text{d'inconnue } z \in \mathbb{C}.$$

25
1) Déterminer une forme trigonométrique des nombres suivants : **a)** $1-\sqrt{2}$. **b)** $-5i$.
c) $2-i$. **d)** $\left(-3+i\sqrt{3}\right)^{19}$. **e)** $-\frac{1+2i}{3+4i}$.
2) Déterminer la forme algébrique de $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{1000}$.
3) Déterminer un argument de $4-3i$ sous la forme d'un arccosinus et d'un arcsinus.

---

26 Simplifier $\operatorname{Re}\left(\frac{1+r\,e^{i\theta}}{1-r\,e^{i\theta}}\right)$ pour tous $r \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

---

27 Déterminer pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ une forme trigonométrique de $1+z+z^2$ où $z = e^{i\theta}$.

---

28 ◷◷ Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels :
1) $(1+i)^n \in \mathbb{R}$. **2)** $\left(\sqrt{3}+i\right)^n \in i\mathbb{R}$.

---

29 ◷◷ Résoudre l'équation $\mathrm{Re}\left(z^3\right) = \mathrm{Im}\left(z^3\right)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ et représenter graphiquement l'ensemble de ses solutions.

---

30 ◷◷◷ Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$:
$$\arg(z) = 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)+|z|}.$$

EXPONENTIELLE COMPLEXE

31 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:
1) ◷ **a)** $e^z = 1+i$. **b)** $e^z = -5-12i$.
2) ◷◷ **a)** $e^z + e^{-z} = 1$.
b) $e^z + e^{-z} = 2i$. **c)** $e^z + 2e^{-z} = i$.

---

32 ◷◷
1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$. En déduire que pour un certain $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $e^{\frac{\alpha}{\tan\alpha}} = \frac{\alpha}{\sin\alpha}$.
2) Montrer que pour $z = \frac{\alpha}{\tan\alpha} + i\alpha$: $e^z = z$.

SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

33 ◷ Primitiver les fonctions suivantes :
1) $x \longmapsto \cos^2(2x)\sin x$. **2)** $x \longmapsto \cos^2 x \sin^4 x$.
3) $x \longmapsto \cos(3x)\sin^3(2x)$.

---

34 ◷◷
1) Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) En déduire $\cos^2 \frac{\pi}{10}$, $\cos\frac{\pi}{5}$, puis $\sin\frac{\pi}{5}$.

---

35 ◷◷ On note ★ l'équation $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
1) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$ solution d'★ :
$$x^2 + x - 1 = 0 \qquad \text{où } x = z + \frac{1}{z}.$$
2) Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est solution d'★.
3) En déduire une expression explicite de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

---

36 ◷◷
1) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\sin^2 x - \sin^2 y = \sin(x+y)\sin(x-y).$$
2) a) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
$$\sin(x+y) = \sin x + \sin y - 4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{x+y}{2}.$$
b) Résoudre l'équation $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

---

37 ◷◷ Si on note C_2 la fonction $x \longmapsto 2x^2 - 1$ et S_2 la fonction $x \longmapsto 2x$, alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$\cos(2\theta) = C_2(\cos\theta) \quad \text{et} \quad \sin(2\theta) = S_2(\cos\theta)\sin\theta.$$
Montrer plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux fonctions polynomiales C_n et S_n pour lesquelles : $\cos(n\theta) = C_n(\cos\theta)$ et $\sin(n\theta) = S_n(\cos\theta)\sin\theta$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

---

38 ◷◷ Simplifier pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \cos(kx+y)$. **2)** $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cos(kx)$.

---

39 ◷◷ Écrire la somme $\sum\limits_{k=-n}^{n} e^{2ikx}$ comme un quotient de sinus pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

40
1) ◷ Montrer que : $|\sin x| \geqslant \frac{1-\cos(2x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) ◷◷ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} |\sin k|$.

---

41 ◷◷◷ Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $x \in \left]-1, 1\right[$. Simplifier : $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k \sin(\omega k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer que :
$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k \sin(\omega k) = \frac{x\sin\omega}{1 - 2x\cos\omega + x^2}.$$

GÉOMÉTRIE

42 ◷ Représenter graphiquement les ensembles suivants :
1) $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z) \geqslant 0\right\}$.
2) $\left\{a + r e^{it} \mid t \in [0,\pi]\right\}$ $(a \in \mathbb{C}, r > 0)$.
3) $\left\{a + \lambda e^{i\theta} \mid \lambda > 0\right\}$ $(a \in \mathbb{C}, \theta \in \mathbb{R})$.
4) $\left\{z \in \mathbb{C}^* \mid \arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]\right\}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.
5) $\left\{z \in \mathbb{C}^* \mid 3\arg(z) \equiv \theta\,[2\pi]\right\}$ $(\theta \in \mathbb{R})$.

---

43 ◷ *Caractériser géométriquement* une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, c'est déterminer si c'est une translation, une symétrie… et préciser ses invariants (vecteur, centre, rapport…).
1) Caractériser géométriquement :
a) $z \longmapsto iz + 1$. **b)** $z \longmapsto 3z - 2$.

c) $z \longmapsto z+3-5i$. **d)** $z \longmapsto 2(1+i)z-7-4i$.

2) Déterminer une expression explicite de la rotation de centre $1+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{4}$.

3) On note r la rotation de centre $2+i$ et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre $1-i$. Caractériser géométriquement $s \circ r$.

---

44 ◷◷

1) Montrer que la composée de deux symétries centrales de $\mathbb{C}$ est une translation.

2) Montrer que la composée de deux rotations de $\mathbb{C}$ est soit une translation, soit une rotation.

---

45 ◷◷◷ Soit $z \in \mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante z et ses deux racines carrées forment-ils un triangle rectangle en z ?

---

46 ◷◷◷ Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b et c. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ABC est équilatéral, autrement dit C est l'image de B par une rotation de centre A à préciser.

(ii) j ou $\overline{j}$ est racine du polynôme aX^2+bX+c.

(iii) $a^2+b^2+c^2 = ab+bc+ca$.

---

47 ◷◷◷

1) Soient $u, v \in \mathbb{U}$. Montrer que si $u+v=-1$:

$$\{u,v\} = \{j, \overline{j}\}.$$

2) Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$. Que peut-on dire du triangle de sommets a, b et c si $a+b+c=0$?

---

48 ◷◷◷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point d'affixe $e^{\frac{in\pi}{4}}$. On définit alors une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante $M_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le projeté orthogonal de M_n sur la droite (OA_{n+1}). Déterminer l'affixe z_n du point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

RACINES $n^{\text{ÈMES}}$

49 ◷◷ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.

2) $z^6 - 2z^3\cos\varphi + 1 = 0 \quad (\varphi \in \mathbb{R})$.

---

50 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre les équations suivantes d'inconnue z :

1) ◷ **a)** $z^4 = 4+4i$. **b)** $(z-1)^3 = 8i$. **c)** $z^n+1=0$.

2) ◷◷ **a)** $z^n = \overline{z}$. **b)** $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

51

1) ◷ Soit $P = X^3+aX^2+bX+c$ un polynôme avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{C}$ a-t-on : $P(X+t) = X^3+3pX+q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$?

2) ◷◷ Soient $p \in \mathbb{C}^*$ et $q \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à une méthode de calcul des racines du polynôme $R = X^3+3pX+q$, dite *méthode de Cardan*.
On note α et β les deux racines éventuellement égales du polynôme X^2+qX-p^3 et γ une racine cubique quelconque de α.

a) Que valent $\alpha+\beta$ et $\alpha\beta$?

b) Montrer que γ est non nul et que $\gamma - \frac{p}{\gamma}$ est une racine de R.

3) Mêmes notations, mais on suppose de plus q non nul. Soient γ et γ' deux racines cubiques distinctes de α. On suppose que $\gamma - \frac{p}{\gamma} = \gamma' - \frac{p}{\gamma'}$.

a) Montrer que $\alpha^2 = -p^3$, puis que $4p^3+q^2=0$.

b) Qu'a-t-on prouvé si $4p^3+q^2 \neq 0$?

3) ◷◷ On pose $P = X^3+3X^2+6X+2$.

a) Appliquer à P le procédé de la question **1)**.

b) Déterminer les racines de R, puis celles de P, en exploitant le procédé de la question **2)**.

---

52 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1) ◷ **a)** $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega$. **b)** $\displaystyle\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega$.

2) ◷◷◷ **a)** $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$. **b)** $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |\omega-1|$.

---

53 ◷◷◷ Soit $n \in \mathbb{N}$ **IMPAIR**. On pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et :

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \qquad (\textit{somme de Gauss}).$$

1) Écrire $|S|^2$ comme une somme double, puis montrer que : $\displaystyle |S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$.

2) **a)** Montrer que la fonction $p \longmapsto \omega^{2pk+p^2}$ est n-périodique sur $\mathbb{Z}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

b) En déduire pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ une écriture simplifiée de $\displaystyle\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2kp+p^2}$.

3) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

4) En déduire l'égalité $|S| = \sqrt{n}$.
