1 PRODUITS, CONJUGUÉS, MODULES

1 ⌚
1) On note f la fonction $z \longmapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{2\}$. Pour quels nombres $z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}$ a-t-on :
a) $\big|f(z)\big|=1$? **b)** $\mathrm{Re}\big(f(z)\big)=0$?
2) On note g la fonction $z\longmapsto \dfrac{2z-\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{i}\}$. Pour quels nombres $z\in\mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{i}\}$ a-t-on :
a) $g(z)\in\mathbb{R}$? **b)** $g(z)\in\mathbb{U}$?

---

2 ⌚ Montrer que pour tous $u,v\in\mathbb{C}$:
$$|u+v|^2+|u-v|^2=2\Big(|u|^2+|v|^2\Big),$$
puis interpréter géométriquement cette égalité.

---

3 ⌚ Montrer que la fonction $z\longmapsto|1+\mathrm{i}z|^2+|z+\mathrm{i}|^2$ est constante sur $\mathbb{U}$.

4
1) ⌚ Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x\longmapsto\dfrac{x}{1+x}$.
2) ⌚⌚ En déduire que pour tous $u,v\in\mathbb{C}$:
$$\frac{|u+v|}{1+|u+v|}\leqslant\frac{|u|}{1+|u|}+\frac{|v|}{1+|v|}.$$

---

5 ⌚⌚
1) Déterminer une factorisation de a^2+b^2 dans $\mathbb{C}$ pour tous $a,b\in\mathbb{C}$.
2) En déduire que si deux entiers naturels sont chacun la somme de deux carrés d'entiers, leur produit l'est aussi.

---

6 ⌚ Simplifier : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ pour tout $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$.

---

7 ⌚⌚ Simplifier : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)$ pour tous $r\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

---

8 ⌚ Résoudre l'équation : $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z^2+z+1}\right)=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{j},\overline{\mathrm{j}}\}$.

---

9 ⌚ Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$:
$$\left(\frac{z+|z|}{\sqrt{\mathrm{Re}(z)+|z|}}\right)^2=2z.$$

10
1) ⌚⌚ Montrer que pour tous $z,z'\in\mathbb{U}$:
$$zz'\neq-1\quad\Longrightarrow\quad\frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}.$$
2) ⌚⌚⌚ Montrer que pour tous $z_1,\dots,z_n\in\mathbb{C}^*$ de même module :
$$\frac{(z_1+z_2)\dots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1\dots z_n}\in\mathbb{R}.$$

---

11 ⌚⌚⌚ Déterminer tous les $z\in\mathbb{C}$ pour lesquels :
$$\overline{z}(z-1)=z^2\big(\overline{z}-1\big).$$

---

2 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

12 ⌚ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:
1) $4z^2-16z+11-12\mathrm{i}=0.$
2) $z^2-5z+4+10\mathrm{i}=0.$
3) $z^2+(4-3\mathrm{i})z=2+8\mathrm{i}.$
4) $2z^2+(8-5\mathrm{i})z+(4-13\mathrm{i})=0.$
5) $6z^2+(21-14\mathrm{i})z+(5-37\mathrm{i})=0.$
6) $z^2+5z+7-\mathrm{i}=0.$
7) $\big(z^2-2z\big)\cos^2\varphi+1=0\quad(\varphi\in\mathbb{R}).$

---

13 ⌚ Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{C}^2$:
1) $\begin{cases}x+y=2\\ xy=2.\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}x+y=1+\mathrm{i}\\ xy=13\mathrm{i}.\end{cases}$
3) $\begin{cases}x+y=3\mathrm{i}\\ xy=-1-3\mathrm{i}.\end{cases}$ **4)** $\begin{cases}x+y=3\mathrm{i}-3\\ xy=-5\mathrm{i}.\end{cases}$

---

3 ARGUMENTS

14 ⌚
1) Déterminer une forme trigonométrique des nombres suivants : **a)** $1-\sqrt{2}$. **b)** $-5\mathrm{i}$.
c) $2-\mathrm{i}$. **d)** $\big(-3+\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^{19}$. **e)** $-\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$.
2) Déterminer la forme algébrique de $\big(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\big)^{1000}$.

---

15 ⌚⌚ Déterminer tous les $n\in\mathbb{N}$ pour lesquels :
1) $(1+\mathrm{i})^n\in\mathbb{R}$. **2)** $\big(\sqrt{3}+\mathrm{i}\big)^n\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

---

16 ⌚⌚ Résoudre l'équation : $\mathrm{Re}\big(z^3\big)=\mathrm{Im}\big(z^3\big)$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

---

17 ⌚⌚ Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On pose : $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Déterminer une forme trigonométrique de $1+z+z^2$.

---

18 🕑🕑 Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{U}$:
$$|a+b+c| = |ab+bc+ca|.$$

---

19 🕑🕑

1) Montrer que pour tout $\theta \in \left]-\pi, \pi\right[$, si on pose : $x = \tan\dfrac{\theta}{2}$, alors : $e^{i\theta} = \dfrac{1+ix}{1-ix}$, puis exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de x.
2) En déduire que : $\arg(z) = 2\,\mathrm{Arctan}\,\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)+|z|}$ pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$.

---

20 🕑🕑🕑

1) Soient $u, v \in \mathbb{U}$. Montrer que si : $u+v=-1$, alors : $\{u,v\} = \{j, \overline{j}\}$.
2) Soient $a, b, c \in \mathbb{U}$. Que peut-on dire du triangle de sommets a, b et c si : $a+b+c=0$?

---

4 Trigonométrie

21 🕑

1) Linéariser les expressions suivantes :
   a) $\sin x \cos^2(2x)$. **b)** $\sin^3(2x)\cos(3x)$.
2) Calculer les intégrales suivantes :
   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^3 x \sin(3x)\,dx$. **b)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^2 x\,dx$.

---

22 🕑🕑

1) Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) En déduire une expression explicite de :
   a) $\cos^2\dfrac{\pi}{10}$. **b)** $\cos\dfrac{\pi}{5}$. **c)** $\sin\dfrac{\pi}{5}$.

---

23 🕑🕑 On note ★ l'équation : $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1) Soit $z \in \mathbb{C}$ une solution d'★. Montrer que si on pose : $x = z+\dfrac{1}{z}$, alors : $x^2+x-1=0$.
2) Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est solution d'★.
3) En déduire une expression explicite de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

---

24 🕑🕑 Simplifier pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx+y)$. 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cos(kx)$.

25

1) 🕑 Montrer que : $|\sin x| \geqslant \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2) 🕑🕑🕑 En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |\sin k|$.

---

26 🕑🕑🕑 Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $x \in \left]-1,1\right[$. Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \sin(\omega k)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer l'égalité : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k \sin(\omega k) = \frac{x\sin\omega}{1-2x\cos\omega+x^2}$.

---

27 🕑🕑🕑 Résoudre l'équation : $\sin(x+y) = \sin x + \sin y$ d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

---

5 Exponentielle complexe

28 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1) 🕑 **a)** $e^z = 1+i$. **b)** $e^z = -5-12i$.
2) 🕑🕑 **a)** $e^z + e^{-z} = 1$.
   b) $e^z + e^{-z} = 2i$. **c)** $e^z + 2e^{-z} = i$.

---

29 🕑 On souhaite montrer que la fonction $z \longmapsto e^z$ possède des points fixes sur $\mathbb{C}$.
On note f la fonction $x \longmapsto e^{\frac{x}{\tan x}} - \dfrac{x}{\sin x}$ sur $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1) Que valent : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$?
   Montrer que : $\exists\, b \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ / \ f(b) = 0$.
2) On pose : $z = \dfrac{b}{\tan b} + ib$. Montrer que : $e^z = z$.

---

6 Racines $n^{\text{èmes}}$

30 🕑 Simplifier le produit : $(u+v)(u+jv)(u+j^2v)$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}$.

---

31 🕑🕑 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: 1) $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.
2) $z^6 - 2z^3\cos\varphi + 1 = 0$ $(\varphi \in \mathbb{R})$.

---

32 Résoudre les équations suivantes d'inconnue z — où $n \in \mathbb{N}^*$:

1) 🕑 **a)** $z^4 = 4+4i$. **b)** $(z-1)^3 = 8i$.
   c) $z^n + 1 = 0$.
2) 🕑🕑 **a)** $z^n = \overline{z}$. **b)** $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

33

1) 🕑 Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Pour quel $t \in \mathbb{C}$ est-il vrai que le polynôme $P(X+t)$ est de la forme : $R = X^3 + 3pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$?

2) 🕒🕒 Soient $p \in \mathbb{C}^*$ et $q \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à une méthode de calcul des racines du polynôme $R = X^3 + 3pX + q$, dite *méthode de Cardan*.
On note α et β les deux racines éventuellement égales du polynôme $X^2 + qX - p^3$ et γ une racine cubique quelconque de α.
a) Que valent $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$?
b) Montrer que $\gamma - \dfrac{p}{\gamma}$ est une racine de R.

3) 🕒🕒 On pose : $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 2$.
a) Appliquer à P le procédé de la question **1)**.
b) Déterminer les racines de R, puis celles de P, en exploitant le procédé de la question **2)**.

---

34 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier :
1) 🕒 **a)** $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega$. **b)** $\displaystyle\prod_{\omega\in\mathbb{U}_n} \omega$.
2) 🕒🕒 **a)** $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$. **b)** $\displaystyle\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

---

35 🕒🕒🕒 Soit $n \in \mathbb{N}$ **IMPAIR**. On pose : $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$ et : $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$ (*somme de Gauss*).
1) Écrire $|S|^2$ comme une somme double, puis montrer que : $|S|^2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$.
2) **a)** Montrer que la fonction $\begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & \omega^{2pk+p^2} \end{cases}$ est n-périodique pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
b) En déduire pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ une écriture simplifiée de : $\displaystyle\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2kp+p^2}$.
3) Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
4) En déduire l'égalité : $|S| = \sqrt{n}$.

---

7 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

36 🕒 On note A, B et C les trois points d'affixes respectifs : $a = 1 + i$, $b = -i$ et $c = -1 + 2i$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

---

37 À quelle condition nécessaire et suffisante sur z :
1) 🕒 les points d'affixes 1, z et z^2 sont-ils alignés ?
2) 🕒 les vecteurs d'affixes z et $\overline{z}$ sont-ils orthogonaux ?
3) 🕒 les points d'affixes z, $\dfrac{1}{z}$ et $z - 1$ sont-ils situés sur un même cercle de centre O ?
4) 🕒🕒 les vecteurs d'affixes z et z^5 sont-ils orthogonaux ?
5) 🕒🕒🕒 z et ses deux racines carrées forment-ils un triangle rectangle en z ?

---

38 On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 5.
1) 🕒 Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels :
a) $MA = MB$. **b)** $MB = MA\sqrt{2}$.
2) 🕒🕒
a) Montrer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, que l'ensemble des points M pour lesquels : $MB = \lambda MA$ est un cercle dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.
b) Étudier l'allure des cercles trouvées en **a)** pour λ très grand (resp. proche de 0, resp. proche de 1 par valeurs inférieures, resp. proche de 1 par valeurs supérieures).

39
1) 🕒 Caractériser géométriquement la similitude :
$$z \longmapsto 2(1+i)z - 7 - 4i.$$
2) 🕒 Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre $1 + i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.
3) 🕒🕒 On note r la rotation de centre $2 + i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre $1 - i$. Caractériser géométriquement la fonction $s \circ r$.
4) 🕒🕒 On note r la rotation de centre i et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et r' la rotation de centre $2i$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$. Caractériser géométriquement la fonction $r' \circ r$.

---

40 🕒🕒🕒 Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ fixé. Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, on pose : $z_\alpha = \dfrac{\mathrm{e}^{i\alpha} - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$ et on note h la fonction $z \longmapsto \dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$.
1) Décrire l'ensemble des z_α, α décrivant $]0, \pi[$.
2) Montrer que : $h(z_\alpha) = \dfrac{i}{\tan\theta} \tan\dfrac{\alpha}{2}$ pour tout $\alpha \in]0, \pi[$. En déduire une description de l'ensemble des $h(z_\alpha)$, α décrivant $]0, \pi[$.

---

41 🕒🕒🕒 Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b et c. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) ABC est un triangle équilatéral, autrement dit C est l'image de B par une certaine rotation de centre A à préciser.
(ii) j ou $\overline{j}$ est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$.
(iii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

---

42 🕒🕒🕒 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point d'affixe $\mathrm{e}^{\frac{in\pi}{4}}$. On définit alors une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $M_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le projeté orthogonal de M_n sur la droite (OA_{n+1}). Déterminer l'affixe z_n du point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
