1 PRODUITS, CONJUGUÉS, MODULES

1 ◷ Déterminer la forme algébrique et le module de :
$$\frac{(2-\mathrm{i})(5+2\mathrm{i})}{3-4\mathrm{i}}.$$

---

2 ◷
1) On note f la fonction $z \longmapsto \dfrac{z+1}{z-2}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{2\}$. Pour quels nombres $z\in\mathbb{C}\setminus\{2\}$ a-t-on :
a) $\left|f(z)\right|=1$? **b)** $\mathrm{Re}\big(f(z)\big)=0$?
2) On note g la fonction $z \longmapsto \dfrac{2z-\mathrm{i}}{z-2\mathrm{i}}$ sur $\mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{i}\}$. Pour quels nombres $z\in\mathbb{C}\setminus\{2\mathrm{i}\}$ a-t-on :
a) $g(z)\in\mathbb{R}$? **b)** $g(z)\in\mathbb{U}$?

---

3 ◷ Montrer que pour tous $u,v\in\mathbb{C}$:
$$|u+v|^2+|u-v|^2=2\Big(|u|^2+|v|^2\Big),$$
puis interpréter géométriquement cette égalité.

---

4 ◷ Montrer que la fonction $z\longmapsto |1+\mathrm{i}z|^2+|z+\mathrm{i}|^2$ est constante sur $\mathbb{U}$.

5
1) ◷ Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $x\longmapsto \dfrac{x}{1+x}$.
2) ◷◷ En déduire que pour tous $u,v\in\mathbb{C}$:
$$\frac{|u+v|}{1+|u+v|}\leqslant\frac{|u|}{1+|u|}+\frac{|v|}{1+|v|}.$$

---

6 ◷◷
1) Déterminer une factorisation de a^2+b^2 dans $\mathbb{C}$ pour tous $a,b\in\mathbb{C}$.
2) Soient $m,n\in\mathbb{N}$. Montrer que si m et n sont chacun la somme de deux carrés d'entiers, leur produit mn l'est aussi.

---

7 ◷ Simplifier : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$ pour tout $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$.

---

8 ◷◷ Simplifier : $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)$ pour tous $r\in[0,1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

---

9 ◷ Résoudre l'équation : $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z^2+z+1}\right)=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}\setminus\{\mathrm{j},\overline{\mathrm{j}}\}$.

---

10 ◷ Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$:
$$\left(\frac{z+|z|}{\sqrt{\mathrm{Re}(z)+|z|}}\right)^2=2z.$$

11
1) ◷◷ Montrer que pour tous $z,z'\in\mathbb{U}$:
$$zz'\neq-1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{z+z'}{1+zz'}\in\mathbb{R}.$$
2) ◷◷◷ Montrer que pour tous $z_1,\ldots,z_n\in\mathbb{C}^*$ de même module :
$$\frac{(z_1+z_2)\ldots(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1\ldots z_n}\in\mathbb{R}.$$

---

12 ◷◷◷ Déterminer tous les $z\in\mathbb{C}$ pour lesquels :
$$\overline{z}(z-1)=z^2\big(\overline{z}-1\big).$$

---

2 ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

13 ◷ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:
1) $4z^2-16z+11-12\mathrm{i}=0$.
2) $z^2-5z+4+10\mathrm{i}=0$.
3) $z^2+(4-3\mathrm{i})z=2+8\mathrm{i}$.
4) $2z^2+(8-5\mathrm{i})z+(4-13\mathrm{i})=0$.
5) $6z^2+(21-14\mathrm{i})z+(5-37\mathrm{i})=0$.
6) $z^2+5z+7-\mathrm{i}=0$.
7) $\left(z^2-2z\right)\cos^2\varphi+1=0 \quad (\varphi\in\mathbb{R})$.

---

14 ◷ Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{C}^2$:
1) $\begin{cases}x+y=2\\ xy=2.\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x+y=1+\mathrm{i}\\ xy=13\mathrm{i}.\end{cases}$
3) $\begin{cases}x+y=3\mathrm{i}\\ xy=-1-3\mathrm{i}.\end{cases}$ 4) $\begin{cases}x+y=3\mathrm{i}-3\\ xy=-5\mathrm{i}.\end{cases}$
5) $\begin{cases}x+y=3+4\mathrm{i}\\ xy=5+15\mathrm{i}.\end{cases}$

---

3 ARGUMENTS

15 ◷
1) Déterminer une forme trigonométrique des nombres suivants : **a)** $1-\sqrt{2}$. **b)** $-5\mathrm{i}$. **c)** $2-\mathrm{i}$. **d)** $\left(-3+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{19}$. **e)** $-\dfrac{1+2\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$.
2) Déterminer la forme algébrique de $\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^{1000}$.

---

16 ◷◷ Déterminer tous les $n\in\mathbb{N}$ pour lesquels :
1) $(1+\mathrm{i})^n\in\mathbb{R}$. 2) $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^n\in\mathrm{i}\mathbb{R}$.

---

17 ◷◷ Résoudre l'équation : $\mathrm{Re}\left(z^3\right)=\mathrm{Im}\left(z^3\right)$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

---

18 ◷◷ Soit $\theta\in\mathbb{R}$. On pose : $z=e^{i\theta}$. Déterminer une forme trigonométrique de $1+z+z^2$.

---

19 ◷◷ Soient $a,b,c\in\mathbb{U}$. Montrer qu'alors :

$$|a+b+c|=|ab+bc+ca|.$$

20

1) ◷◷ Montrer que pour tout $\theta\in\,]-\pi,\pi[$, si on pose : $x=\tan\frac{\theta}{2}$, alors : $e^{i\theta}=\frac{1+ix}{1-ix}$, puis exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de x.
2) ◷◷ En déduire pour tout $t\in\mathbb{R}$ une simplification de : $\cos\left(2\,\mathrm{Arctan}\,t\right)$ et $\sin\left(2\,\mathrm{Arctan}\,t\right)$.
3) ◷◷◷ Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$:

$$\arg(z)\equiv 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)+|z|}\quad[2\pi].$$

---

21 ◷◷◷

1) Soient $u,v\in\mathbb{U}$. Montrer que si : $u+v=-1$, alors : $\{u,v\}=\{j,\overline{j}\}$.
2) Soient $a,b,c\in\mathbb{U}$. Que peut-on dire du triangle de sommets a, b et c si : $a+b+c=0$?

---

4 TRIGONOMÉTRIE

22 ◷

1) Linéariser les expressions suivantes :
   a) $\sin x\cos^2(2x)$. **b)** $\sin^3(2x)\cos(3x)$.
2) Calculer les intégrales suivantes :
   a) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^3x\sin(3x)\,\mathrm{d}x$.
   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4x\cos^2x\,\mathrm{d}x$.

---

23 ◷◷

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos x$.
2) En déduire une expression explicite de :
   a) $\cos^2\frac{\pi}{10}$. **b)** $\cos\frac{\pi}{5}$. **c)** $\sin\frac{\pi}{5}$.

---

24 ◷◷ On note ★ l'équation : $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1) Soit $z\in\mathbb{C}$ une solution d'★. Montrer que si on pose : $x=z+\frac{1}{z}$, alors : $x^2+x-1=0$.
2) Montrer que $e^{\frac{2i\pi}{5}}$ est solution d'★.
3) En déduire une expression explicite de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

---

25 ◷◷ Simplifier pour tous $x,y\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(kx+y)$. 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)$.

26

1) ◷ Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$|\sin x|\geqslant\frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

2) ◷◷ En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}|\sin k|\geqslant\frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1}.$$

---

27 ◷◷◷ Soient $\omega\in\mathbb{R}$ et $x\in\,]-1,1[$. Simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k\sin(\omega k)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, puis montrer l'égalité : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}x^k\sin(\omega k)=\frac{x\sin\omega}{1-2x\cos\omega+x^2}$.

---

28 ◷◷◷ Résoudre l'équation :

$$\sin(x+y)=\sin x+\sin y$$

d'inconnue $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

---

5 EXPONENTIELLE COMPLEXE

29 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z\in\mathbb{C}$:

1) ◷ **a)** $e^z=1+i$. **b)** $e^z=-5-12i$.
2) ◷◷ **a)** $e^z+e^{-z}=1$.
   b) $e^z+e^{-z}=2i$. **c)** $e^z+2e^{-z}=i$.

---

30 ◷ On souhaite montrer que la fonction $z\longmapsto e^z$ possède des points fixes sur $\mathbb{C}$.
On note f la fonction $x\longmapsto e^{\frac{x}{\tan x}}-\frac{x}{\sin x}$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Que valent : $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$?
   Montrer que : $\exists\, b\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\ /\ f(b)=0$.
2) On pose : $z=\frac{b}{\tan b}+ib$. Montrer qu'alors : $e^z=z$.

---

6 RACINES $n^{\text{èmes}}$

31 ◷◷ Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: **1)** $z^8 - 3z^4 + 2 = 0$.
2) $z^6 - 2z^3 \cos\varphi + 1 = 0 \quad (\varphi \in \mathbb{R})$.

---

32 Résoudre les équations suivantes d'inconnue z — où $n \in \mathbb{N}^*$:
1) ◷ **a)** $(z+2)^3 = 3i$.
b) $(z-1)^4 = 4+4i$. **c)** $z^n + 1 = 0$.
2) ◷◷ **a)** $z^n = \overline{z}$. **b)** $\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$.

33
1) ◷ Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{C}$ est-il vrai que le polynôme $P(X+t)$ est de la forme : $R = X^3 + 3pX + q$ avec $p, q \in \mathbb{C}$?
2) ◷◷ Soient $p \in \mathbb{C}^*$ et $q \in \mathbb{C}$. On s'intéresse à une méthode de calcul des racines du polynôme $R = X^3 + 3pX + q$, dite *méthode de Cardan*.
On note α et β les deux racines éventuellement égales du polynôme $X^2 + qX - p^3$ et $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les trois racines cubiques de α.
a) Que valent $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$?
b) Montrer que $\gamma_k - \dfrac{p}{\gamma_k}$ est une racine de R pour tout $k \in [\![1,3]\!]$.
3) ◷◷ On pose : $P = X^3 + 3X^2 + 6X + 2$.
a) Appliquer à P le procédé de la question **1)**.
b) Déterminer les racines de R, puis celles de P, en exploitant la méthode de Cardan de la question **2)**.

---

34 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier :
1) ◷ **a)** $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$. **b)** $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega$.
2) ◷◷ **a)** $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1+\omega)^n$. **b)** $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |\omega - 1|$.

---

35 ◷◷◷ Soit $n \in \mathbb{N}$ **IMPAIR**. On pose :

$$\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} \qquad \text{et} \qquad S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2} \quad (\textit{somme de Gauss}).$$

1) Écrire $|S|^2$ comme une somme double, puis montrer que : $\displaystyle |S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2pk+p^2}$.
2) **a)** Montrer que la fonction $\begin{cases} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ p & \longmapsto & \omega^{2pk+p^2} \end{cases}$ est n-périodique pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
b) En déduire pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ une écriture simplifiée de : $\displaystyle\sum_{p=-k}^{n-k-1} \omega^{2kp+p^2}$.
3) Simplifier : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{2pk}$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$.
4) En déduire l'égalité : $|S| = \sqrt{n}$.

---

7 INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

36 ◷ On note A, B et C les trois points d'affixes respectifs : $a = 1 + i$, $b = -i$ et $c = -1 + 2i$. Que peut-on dire du triangle ABC ?

---

37 À quelle condition nécessaire et suffisante sur z :
1) ◷ z et z^2 sont-ils les affixes de deux vecteurs :
a) colinéaires ? **b)** orthogonaux ?
2) ◷ 1, z et z^2 sont-ils les affixes de trois points alignés ?
3) ◷ z et $\overline{z}$ sont-ils les affixes de deux vecteurs orthogonaux ?
4) ◷ z, $\dfrac{1}{z}$ et $z - 1$ sont-ils les affixes de points situés sur un même cercle de centre O ?
5) ◷◷◷ z et ses deux racines carrées forment-ils un triangle rectangle en z ?

---

38 On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe 5.
1) ◷ Déterminer le lieu des points M pour lesquels :
a) $MA = MB$. **b)** $MB = MA\sqrt{2}$.
2) ◷◷
a) Montrer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, que le lieu des points M pour lesquels : $MB = \lambda MA$ est un cercle dont on précisera l'affixe du centre et le rayon.
b) Étudier l'allure des cercles trouvées en **a)** pour λ très grand (resp. proche de 0, resp. proche de 1 par valeurs inférieures, resp. proche de 1 par valeurs supérieures).

---

39 ◷
1) Caractériser géométriquement la similitude :

$$z \longmapsto 2(1+i)z - 7 - 4i.$$

2) Déterminer l'expression complexe de la rotation de centre $1 + i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.
3) On note r la rotation de centre 1 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et s la symétrie centrale de centre $3+i$. Caractériser géométriquement la fonction $s \circ r$.
4) On note r la rotation de centre $2 + i$ et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et r' la rotation de centre $3 - 2i$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{3}$. Caractériser géométriquement la fonction $r' \circ r$.

---

40 ◷◷◷ Soit $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ fixé. Pour tout $\alpha \in]0, \pi[$, on pose : $z_\alpha = \dfrac{e^{i\alpha} - \cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}$ et on note h la fonction $z \longmapsto \dfrac{z\cos\theta - \sin\theta}{z\sin\theta + \cos\theta}$.
1) Décrire l'ensemble des z_α, α décrivant $]0, \pi[$.

2) Montrer que pour tout $\alpha \in \left]0, \pi\right[$:

$$h(z_\alpha) = \mathrm{i}\,\frac{\tan\dfrac{\alpha}{2}}{\tan\theta}.$$

En déduire une description de l'ensemble des $h(z_\alpha)$, α décrivant $\left]0, \pi\right[$.

---

41 ◷◷◷ Soient A, B et C trois points d'affixes respectifs a, b et c. Par définition, le triangle ABC est équilatéral si les distances AB, BC et CA sont égales, mais on admettra qu'il l'est si et seulement si, par exemple, C est l'image de B par une certaine rotation de centre A et d'angle de mesure à préciser.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) ABC est un triangle équilatéral.
(ii) j ou $\overline{\mathrm{j}}$ est racine du polynôme $aX^2 + bX + c$.
(iii) $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

---

42 ◷◷◷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n le point d'affixe $e^{\frac{in\pi}{4}}$. On définit alors une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante : $M_0 = A_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_{n+1} est le projeté orthogonal de M_n sur la droite (OA_{n+1}). Déterminer l'affixe z_n du point M_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
