1 Opérations sur les polynômes

1 Déterminer $U\big(\mathbb{K}[X]\big)$.

---

2 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} P^{(k)}(X)X^{k+1}$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0 pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

---

3 On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des polynômes $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k X^k$, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décrivant l'ensemble des suites presque nulles de réels positifs ou nuls. Montrer que $\mathscr{A}$ est stable par produit.

4

1) Simplifier la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{a}{k}\binom{b}{r-k}$ pour tous $a, b, r \in \mathbb{N}$.
2) En déduire une simplification de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{2n}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5

1) Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers. Montrer que toute racine rationnelle de P est un entier.
2) Soient $k, d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que d n'est la puissance $k^{\text{ème}}$ d'aucun entier. Montrer qu'alors $\sqrt[k]{d}$ est irrationnel.
3) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Le polynôme $X^3 + kX + 1$ peut-il avoir une racine rationnelle ?

---

6 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1) Déterminer, en fonction des coefficients de P, une expression simple de : $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P\big(e^{it}\big)\right|^2 dt$.
2) On suppose que P est non nul à coefficients entiers et que pour tout $u \in \mathbb{U}$: $\big|P(u)\big| < \sqrt{2}$. Montrer qu'alors P est un monôme.
3) Que devient le résultat de la question **2)** si on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large ?

---

2 Division euclidienne

7 À quelle condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est-il divisible par $X^2 + 2$?

---

8 Soit $a \in \mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a le polynôme $X^4 - X + a$ est-il divisible par $X^2 - aX + 1$?

---

9 Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^4$ pour tout $n \geqslant 4$.

---

10 Calculer le reste de la division euclidienne :

1) de $X^n(X+1)^2$ par $(X-1)(X-2)$.
2) de X^{100} par $(X-1)^3(X+1)$.
3) de X^{2n} par $\big(X^2+1\big)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

11 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 3, que son reste par $X-2$ vaut 7 et que son reste par $X-3$ vaut 13. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.
2) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par X^2+4 vaut $X+1$ et que son reste par $X-3$ vaut 14. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $\big(X^2+4\big)(X-3)$.

---

12 Soient $n, k \in \mathbb{N}$. Si r désigne le reste de la division euclidienne de k par n, montrer que X^r est le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$.

---

3 Racines et multiplicités

13 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la multiplicité de 1 dans $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?

---

14 Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

---

15 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$$

est divisible par $(X-1)^3$.

---

16 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

---

17 Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

---

18 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

$$X^n \sin\theta - X\sin(n\theta) + \sin\big((n-1)\theta\big)$$

est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$.

19 🕑🕑 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$.

---

20 🕑🕑🕑 Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ premiers entre eux. Montrer qu'alors $\left(X^p-1\right)\left(X^q-1\right)$ divise $(X-1)\left(X^{pq}-1\right)$.

---

4 Nombre maximal de racines

21 🕑 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant de degré n et $y \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du nombre de solutions de l'équation : $y = P(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$?

---

22 🕑🕑

1) Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   a) pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $P(x) = \sqrt{x}$?
   b) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \sin x$?
   c) pour tout $x \in [0, 2\pi]$: $P(x) = \sin x$?
   d) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = e^x$?
   e) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$?
   f) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \lfloor x \rfloor$?
2) Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :
   a) pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = \overline{z}$?
   b) pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = |z|^2$?

---

23 🕑🕑 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
1) $P(n) = n^2$. 2) $P(n) = n^2 + (-1)^n$.

---

24 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.

1) 🕑🕑 On suppose que P est unitaire et que pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$: $P(k) = \dfrac{1}{k^2}$. Calculer $P(n+2)$.
2) 🕑🕑 On suppose que : $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $P(n+1)$.
1) 🕑🕑🕑 On suppose que : $P(k) = \dfrac{1}{k}$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$. Calculer $P(0)$.

---

25 🕑🕑 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients entiers. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(n) \in \mathbb{P}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P\big(n + P(n)\big)$ est divisible par $P(n)$.
2) En déduire que : $P\big(X + P(X)\big) = P(X)$, puis trouver une contradiction.

---

26 🕑🕑🕑 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels : $P(0) = 1$ et $P\big(X^2+1\big) = P(X)^2 + 1$.

---

27 🕑🕑🕑 On s'intéresse à l'ensemble $\mathscr{A}$ des fonctions $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{kx}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n décrivant $\mathbb{N}$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ décrivant $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2) Montrer que $\mathscr{A}$ est intègre.
3) Déterminer $U(\mathscr{A})$.

---

5 Équations polynomiales

28 🕑🕑 Résoudre les équations polynomiales suivantes d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:

1) $P = P'P''$. 2) $P'^2 = 4P$.
3) $P'P'' = 18P$. 4) $P(X+1) = P(X)$.
5) $P(X+1) - P(X) = X$. 6) $\left(X^2+1\right)P'' = 6P$.
7) $P\left(X^2\right) = \left(X^2+1\right)P(X)$.
8) $(X+4)P(X) = XP(X+1)$.

---

6 Polynômes scindés et relations coefficients-racines

29 🕑🕑 Soit $n \geqslant 2$.

1) Simplifier : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.
2) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$:
$$\sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2} \left|1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right|.$$
3) Simplifier enfin le produit : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

---

30 🕑🕑 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $(X+1)^n - e^{2in\theta}$.

1) Déterminer les racines de P dans $\mathbb{C}$.
2) En déduire que P est scindé sur $\mathbb{C}$.
2) 🕑🕑🕑 Simplifier le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$.

---

31 Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On pose : $P = X^3 + pX + q$. Comme P est réel de degré 3, P est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après une remarque du cours. On note alors x, y et z ses trois racines complexes comptées avec multiplicité. Simplifier en fonction de p et q les quantités suivantes :

1) 🕑 $x^2 + y^2 + z^2$. 2) 🕑🕑 $x^3 + y^3 + z^3$.

Et si : $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$:

3) 🕑 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. 4) 🕑 $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$.

---

32 ◷◷ Soient $p, q \in \mathbb{R}$. On pose : $P = X^3 + pX + q$. Comme P est réel de degré 3, P est scindé sur $\mathbb{C}$ d'après une remarque du cours. On note alors x, y et z ses trois racines complexes comptées avec multiplicité.

1) Prouver l'égalité :
$$P'(x)P'(y)P'(z) = 4p^3 + 27q^2$$
au moyen des relations coefficients-racines.

2) À quelle condition nécessaire et suffisante sur p et q le polynôme P possède-t-il une racine multiple ?

---

33 ◷◷

1) On note ★ le système $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=21 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \end{cases}$ d'inconnue $(x,y,z) \in (\mathbb{C}^*)^3$. Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{C}^*)^3$. On pose : $P = (X-x)(X-y)(X-z)$.

a) Si (x,y,z) est solution d'★, déterminer P explicitement.

b) Résoudre ★.

2) Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^3$:

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \\ xyz=2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$

---

34 ◷◷ On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant : $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Le polynôme T_n ainsi construit est appelé le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev*. Dans les questions suivantes, les résultats sont exigés « pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».

1) a) Déterminer le degré de T_n et calculer son coefficient dominant.

b) Calculer le coefficient constant de T_{2n}.

2) a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

b) Montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la relation **a)** est vraie.

c) En dérivant deux fois la relation **a)**, montrer l'égalité : $(X^2-1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$.

3) Désormais, $n \geqslant 1$.

a) Déterminer toutes les racines de T_n dans $[-1,1]$.

b) En déduire que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$.

c) Simplifier enfin le produit : $\displaystyle\prod_{k=0}^{2n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}$.

---

7 POLYNÔMES ANNULATEURS DE MATRICES

35 ◷◷ Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$ est inversible pour $n \geqslant 2$ et calculer son inverse en exhibant d'abord un polynôme annulateur.

---

36 ◷◷ Calculer les puissances des matrices suivantes en exhibant d'abord pour chacune un polynôme annulateur :

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (degré 2).

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (degré 2).

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (degré 3).

---

8 POLYNÔMES DE LAGRANGE

37 ◷ Soient $n \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier $\displaystyle\sum_{i=1}^n L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i L_i$.

---

38 ◷◷ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^n \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right).$$

---

39 ◷◷ On note $L_1, \ldots, L_n$ les polynômes de Lagrange de $1, \ldots, n$.

1) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.

2) Exprimer de deux manières l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ pour lequel : $P(k) = k^{n-1}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

3) En déduire une simplification de : $\displaystyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k}k^n$.

---

40 ◷◷◷ Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels : $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ (resp. $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$).
