

1 EXERCICES DIVERS

- 1** ☹️ Déterminer $U(\mathbb{K}[X])$.

- 2** ☹️ Montrer que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} P^{(k)}(X) X^{k+1}$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0 pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

- 3** ☹️ On note \mathcal{A} l'ensemble des polynômes $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k X^k$ où $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite presque nulle de réels positifs ou nuls. Montrer que \mathcal{A} est stable par produit.

- 4** ☹️☹️ Soient $a, b, r, n \in \mathbb{N}$.
1) Simplifier : $\sum_{k=0}^r \binom{a}{k} \binom{b}{r-k}$
2) En déduire une simplification de : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n}{k}$.

- 5** Soient $n, k \in \mathbb{N}$ avec : $k \leq n$. On pose :
$$S = \sum_{i=k}^n \binom{i}{k} \quad \text{et} \quad P = \sum_{i=k}^n (X+1)^i.$$

1) ☹️☹️ Exprimer S en fonction de $P^{(k)}(0)$.
2) ☹️☹️☹️ En déduire S .

- 6** ☹️☹️
1) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Montrer que toute racine rationnelle de P est un entier.
2) Soient $k, d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si d n'est pas une puissance $k^{\text{ème}}$ d'entier, alors $\sqrt[k]{d}$ est irrationnel.
3) Soit $k \in \mathbb{Z}$. Le polynôme $X^3 + kX + 1$ peut-il avoir une racine rationnelle ?

- 7** ☹️☹️☹️ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
1) Déterminer, en fonction des coefficients de P , une expression simple de : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt$.
2) On suppose que P est non nul à coefficients entiers et que pour tout $u \in \mathbb{U}$: $|P(u)| < \sqrt{2}$. Montrer qu'alors P est un monôme.
3) Que devient le résultat de la question 2) si on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large ?

2 DIVISION EUCLIDIENNE

- 8** ☹️ À quelle condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ le polynôme $X^4 + X^3 + \lambda X^2 + \mu X + 2$ est-il divisible par $X^2 + 2$?

- 9** ☹️☹️ Soit $a \in \mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a le polynôme $X^4 - X + a$ est-il divisible par $X^2 - aX + 1$?

- 10** ☹️☹️ Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^4$ pour tout $n \geq 4$.

- 11** Calculer le reste de la division euclidienne :
1) ☹️ de $X^n(X+1)^2$ par $(X-1)(X-2)$.
2) ☹️☹️ de X^{100} par $(X-1)^3(X+1)$.
3) ☹️☹️ de X^{2n} par $(X^2+1)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) ☹️☹️☹️ de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 12** ☹️☹️ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
1) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 3, que son reste par $X-2$ vaut 7 et que son reste par $X-3$ vaut 13. Déterminer le reste de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.
2) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par X^2+4 vaut $X+1$ et que son reste par $X-3$ vaut 14. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X^2+4)(X-3)$.

- 13** ☹️☹️☹️ Soient $n, k \in \mathbb{N}$. Si r désigne le reste de la division euclidienne de k par n , montrer que X^r est le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$.

3 RACINES ET MULTIPLICITÉS

- 14** ☹️ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la multiplicité de 1 dans $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?

- 15** ☹️ Montrer que $X^2 + X + 1$ divise $X^{311} + X^{82} + X^{15}$.

- 16** ☹️ Montrer que $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- 17** ☹️ Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $P(X^n)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

18 ☹☹ Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $X^{2n} + X^n + 1$ est-il divisible par $X^2 + X + 1$?

19 ☹☹ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, le polynôme $X^n \sin \theta - X \sin(n\theta) + \sin((n-1)\theta)$ est divisible par $X^2 - 2X \cos \theta + 1$.

20 ☹☹ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples dans \mathbb{C} .

21 ☹☹☹ Soient $p \geq 2$ et $q \geq 2$ premiers entre eux. Montrer qu'alors $(X^p - 1)(X^q - 1)$ divise $(X - 1)(X^{pq} - 1)$.

4 NOMBRE MAXIMAL DE RACINES

22 ☹ Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant de degré n et $y \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du nombre de solutions de l'équation : $y = P(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$?

23 ☹☹

- 1) Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
 - a) pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $P(x) = \sqrt{x}$?
 - b) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \sin x$?
 - c) pour tout $x \in [0, 2\pi]$: $P(x) = \sin x$?
 - d) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = e^x$?
 - e) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$?
 - f) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = [x]$?
- 2) Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :
 - a) pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = \bar{z}$?
 - b) pour tout $z \in \mathbb{C}$: $P(z) = |z|^2$?

24 ☹☹ Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- 1) $P(n) = n^2$.
- 2) $P(n) = n^2 + (-1)^n$.

25 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n .

- 1) ☹☹ On suppose que P est unitaire et que pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$: $P(k) = \frac{1}{k^2}$. Calculer $P(n+2)$.
- 2) ☹☹ On suppose que : $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $P(n+1)$.
- 3) ☹☹☹ On suppose que : $P(k) = \frac{1}{k}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Calculer $P(0)$.

26 ☹☹ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme à coefficients entiers. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(n) \in \mathbb{P}$.

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n + P(n))$ est divisible par $P(n)$.
- 2) En déduire que : $P(X + P(X)) = P(X)$, puis trouver une contradiction.

27 ☹☹☹ Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels : $P(0) = 1$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.

28 ☹☹☹ On s'intéresse à l'ensemble \mathcal{A} des fonctions $x \mapsto \sum_{k=0}^n \lambda_k e^{kx}$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , n décrivant \mathbb{N} et $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ décrivant \mathbb{R} .

- 1) Montrer que \mathcal{A} est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- 2) Montrer que \mathcal{A} est intègre.
- 3) Déterminer $U(\mathcal{A})$.

5 ÉQUATIONS POLYNOMIALES

29 ☹☹ Résoudre les équations polynomiales suivantes d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$:

- 1) $P = P'P''$.
- 2) $P'^2 = 4P$.
- 3) $P'P'' = 18P$.
- 4) $P(X + 1) = P(X)$.
- 5) $P(X + 1) - P(X) = X$.
- 6) $(X^2 + 1)P'' = 6P$.
- 7) $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$.
- 8) $(X + 4)P(X) = XP(X + 1)$.

6 POLYNÔMES SCINDÉS ET RELATIONS COEFFICIENTS-RACINES

30 Calculer la forme scindée sur \mathbb{C} des polynômes suivants — avec $n \in \mathbb{N}^*$:

- 1) ☹ a) $X^4 - 16$.
- b) $X^3 - i$.
- 2) ☹☹ a) $X^{2n-1} + 1$.
- b) $X^{2n} - 1$.
- c) $X^{2n} + 1$.

31 ☹☹ Soit $n \geq 2$.

- 1) Simplifier : $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}})$.
- 2) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\sin \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2} \left| 1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right|$$

- 3) Simplifier enfin le produit : $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$.

32 ☹☹ Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note P le polynôme $(X + 1)^n - e^{2in\theta}$.

- 1) Déterminer les racines de P dans \mathbb{C} .
- 2) En déduire que P est scindé sur \mathbb{C} .

2) ☺☺☺ Simplifier le produit $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$.

33 Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On pose : $P = X^3 + pX + q$ et on note x, y et z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité. Simplifier en fonction de p et q les quantités suivantes :

1) ☺ $x^2 + y^2 + z^2$. 2) ☺☺ $x^3 + y^3 + z^3$.

Et si : $x \neq 0, y \neq 0$ et $z \neq 0$:

3) ☺ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. 4) ☺ $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$.

34 ☺☺ Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On pose : $P = X^3 + pX + q$ et on note x, y et z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité.

- 1) Prouver l'égalité : $P'(x)P'(y)P'(z) = 4p^3 + 27q^2$ au moyen des relations coefficients-racines.
- 2) À quelle condition nécessaire et suffisante sur p et q le polynôme P possède-t-il une racine multiple ?

35 ☺☺ 1) On note ★ le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \end{cases}$ d'in-

connue $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$. Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{C}^*)^3$. On pose : $P = (X - x)(X - y)(X - z)$.

- a) Si (x, y, z) est solution d'★, déterminer P explicitement.
- b) Résoudre ★.

2) Résoudre les systèmes suivants dans \mathbb{C}^3 :

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ xyz = 2. \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3. \end{cases}$

36 ☺☺☺ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n . On note s_k , pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la somme des racines de $P^{(k)}$ dans \mathbb{C} comptées avec multiplicité. Montrer que s_0, \dots, s_{n-1} sont en progression arithmétique.

37 ☺☺ On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant : $T_0 = 1, T_1 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$. Le polynôme T_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Tchebychev. Dans les questions qui suivent, les résultats sont exigés « pour tout $n \in \mathbb{N}$ ».

- 1) a) Déterminer le degré de T_n et calculer son coefficient dominant.
- b) Calculer le coefficient constant de T_{2n} .
- 2) a) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

- b) Montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la relation a) est vraie.
- c) En dérivant deux fois la relation a), montrer l'égalité : $(X^2 - 1)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$.
- 3) Désormais : $n \geq 1$.

- a) Déterminer toutes les racines de T_n dans $[-1, 1]$.
- b) En déduire que T_n est scindé sur \mathbb{R} .
- c) Simplifier enfin le produit : $\prod_{k=0}^{2n-1} \cos \frac{(2k+1)\pi}{4n}$.

7 POLYNÔMES ANNULATEURS DE MATRICES

38 ☺☺ Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$

est inversible pour $n \geq 2$ et calculer son inverse en exhibant d'abord un polynôme annulateur.

39 ☺☺ Calculer les puissances des matrices suivantes en exhibant d'abord pour chacune un polynôme annulateur :

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (degré 2).

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (degré 2).

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (degré 3).

8 POLYNÔMES DE LAGRANGE

40 ☺ Soient $n \geq 2, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et L_1, \dots, L_n les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes $\sum_{i=1}^n L_i$ et $\sum_{i=1}^n x_i L_i$.

41 ☺☺ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=0}^n \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right).$$

42 ☺☺ On note L_1, \dots, L_n les polynômes de Lagrange de $1, \dots, n$.

- 1) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.
- 2) Déterminer de deux manières l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ pour lequel : $P(k) = k^{n-1}$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
- 3) En déduire une simplification de : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

43 ☺☺☺ Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels : $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ (resp. $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$).