EXERCICES DIVERS

1 Déterminer $\mathrm{U}\big(\mathbb{K}[X]\big)$.

---

2 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n. Que vaut $P^{(n)}$?

---

3 Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} P^{(k)}(X) X^{k+1}$ est l'unique primitive de P qui s'annule en 0 pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.

---

4 Soient $a, b, r, n \in \mathbb{N}$.

1) Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{a}{k}\binom{b}{r-k}$.
2) En déduire une simplification de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{2n}{k}$.

5

1) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire. Montrer, par des considérations arithmétiques, que toute racine rationnelle de P est un entier.
2) Soient $k, d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si d n'est pas une puissance $k^{\text{ème}}$ d'entier, alors $\sqrt[k]{d}$ est irrationnel.
3) Pour quels entiers $k \in \mathbb{Z}$ le polynôme $X^3 + kX + 1$ a-t-il une racine rationnelle ?

---

6 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1) Déterminer, en fonction des coefficients de P, une expression simple de $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P\left(e^{it}\right)\right|^2 dt$.
2) On suppose que P est non nul à coefficients entiers et que $\big|P(u)\big| < \sqrt{2}$ pour tout $u \in \mathbb{U}$. Montrer que P est un monôme.
3) Que devient le résultat de la question **2)** si on remplace l'inégalité stricte par une inégalité large ?

DIVISION EUCLIDIENNE

7 Soient $a, b \in \mathbb{C}$.

1) À quelle condition nécessaire et suffisante sur a et b le polynôme $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ est-il divisible par $X^2 + 2$?
2) À quelle condition nécessaire et suffisante sur a le polynôme $X^4 - X + a$ est-il divisible par $X^2 - aX + 1$?

---

8 Calculer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^4$ pour tout $n \geqslant 4$.

---

9 Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ le reste de la division euclidienne :

1) de $X^n(X+1)^2$ par $(X-1)(X-2)$.
2) de X^n par $(X-1)^2(X+1)$.
3) de X^{2n} par $\left(X^2+1\right)^2$.
4) de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n+1}$ par $X^2 + X + 1$.

---

10 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 3, que son reste par $X-2$ vaut 7 et que son reste par $X-3$ vaut 13. Déterminer le reste de P par $(X-1)(X-2)(X-3)$.
2) On suppose que le reste de la division euclidienne de P par X^2+4 vaut $X-9$ et que son reste par $X-3$ vaut 7. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $\left(X^2+4\right)(X-3)$.

---

11 Soient $n, k \in \mathbb{N}$. Si r désigne le reste de la division euclidienne de k par n, montrer que X^r est le reste de la division euclidienne de X^k par $X^n - 1$.

RACINES ET MULTIPLICITÉS

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la multiplicité de 1 dans $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$?

---

13 Montrer que $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ est divisible par $(X-1)^3$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

14 Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $P\left(X^n\right)$ est divisible par $X-1$, alors il l'est aussi par $X^n - 1$.

15

1) Montrer que X^2+X+1 divise $X^{311}+X^{82}+X^{15}$.
2) Déterminer tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $X^{2n} + X^n + 1$ est divisible par $X^2 + X + 1$.

---

16 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$, le polynôme $X^n \sin\theta - X\sin(n\theta) + \sin\big((n-1)\theta\big)$ est divisible par $X^2 - 2X\cos\theta + 1$.

---

17 Montrer que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ est à racines simples dans $\mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

18 Soient $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ premiers entre eux. Montrer qu'alors $\left(X^p-1\right)\left(X^q-1\right)$ divise $(X-1)\left(X^{pq}-1\right)$.

NOMBRE MAXIMAL DE RACINES

19 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant de degré n et $y \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire du nombre de solutions de l'équation $y = P(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$?

---

20 Pourquoi n'existe-t-il pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lequel :

1) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \lfloor x \rfloor$?
2) pour tout $x \geqslant 0$: $P(x) = \sqrt{x}$?
3) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = \sin x$?
4) pour tout $x \in [0, 2\pi[$: $P(x) = \sin x$?
5) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P(x) = e^x$?

---

21 Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels pour tout $n \in \mathbb{N}$:
1) $P(n) = n^2$. 2) $P(n) = n^2 + (-1)^n$.

---

22 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n.

1) On suppose que $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $P(n+1)$.
2) On suppose que $P(k) = \dfrac{1}{k^2}$ pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$. Calculer le coefficient dominant de P.

---

23 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $a^n - b^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(a - e^{\frac{2ik\pi}{n}} b\right)$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$.
2) En déduire que $A^n - B^n = \prod_{k=0}^{n-1} \left(A - e^{\frac{2ik\pi}{n}} B\right)$ pour tous $A, B \in \mathbb{C}[X]$.

---

24 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant à coefficients entiers. On suppose que $P(n) \in \mathbb{P}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P\big(n + P(n)\big)$ est divisible par $P(n)$.
2) En déduire que $P\big(X + P(X)\big) = P(X)$, puis trouver une contradiction.

---

25 Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels $P(0) = 1$ et $P\big(X^2+1\big) = P(X)^2 + 1$.

---

26 On s'intéresse à l'ensemble A des fonctions $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \lambda_k e^{kx}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, n décrivant $\mathbb{N}$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ décrivant $\mathbb{R}$.

1) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2) Montrer que A est intègre.
3) Déterminer $\mathrm{U}(A)$.

ÉQUATIONS POLYNOMIALES

27 Résoudre les équations polynomiales suivantes d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$: 1) $P'^2 = 4P$.
2) $P = P'P''$. 3) $\big(X^2+1\big)P'' = 6P$.
4) a) $P(X+1) = P(X)$. b) $P(X+1) - P(X) = X$.
5) $(X+4)P(X) = X\,P(X+1)$.

POLYNÔMES SCINDÉS ET RELATIONS COEFFICIENTS-RACINES

28 Calculer la forme scindée sur $\mathbb{C}$ des polynômes suivants : 1) $X^4 - 16$.
2) $X^3 - i$. 3) $X^n + 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

---

29 Soient $n \geqslant 2$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

1) Simplifier $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$, puis en déduire que :
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$
2) a) Écrire les racines du polynôme $(X+1)^n - e^{2in\theta}$ sous la forme $2u \sin \varphi$ avec $u \in \mathbb{U}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$.
b) En déduire $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)$.

---

30 Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On pose $P = X^3 + pX + q$ et on note x, y et z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité. Simplifier en fonction de p et q les quantités suivantes :
1) $x^2 + y^2 + z^2$. 2) $x^3 + y^3 + z^3$.
Et si x, y et z sont non nuls :
3) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$. 4) $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2}$.

---

31 Soient $p, q \in \mathbb{C}$. On pose $P = X^3 + pX + q$ et on note x, y et z les trois racines complexes de P comptées avec multiplicité.

1) Montrer que $P'(x)\,P'(y)\,P'(z) = 4p^3 + 27q^2$ au moyen des relations coefficients-racines.
2) À quelle condition nécessaire et suffisante sur p et q le polynôme P possède-t-il une racine multiple ?

32

1) On note ★ le système $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 19 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1 \end{cases}$ d'inconnue $(x, y, z) \in \big(\mathbb{C}^*\big)^3$. Soit $(x, y, z) \in \big(\mathbb{C}^*\big)^3$. On pose $P = (X-x)(X-y)(X-z)$.
a) Si (x, y, z) est solution d'★, déterminer P explicitement.
b) Résoudre ★.
2) Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{C}^3$:

a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=6 \\ xyz=-2. \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=0 \\ x^3+y^3+z^3=3. \end{cases}$

---

33 Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. On note s_k la somme des racines de $P^{(k)}$ dans $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$. Montrer que les nombres $s_0, \dots, s_{n-1}$ sont en progression arithmétique, i.e. que les écarts $s_1 - s_0, \dots, s_n - s_{n-1}$ sont égaux.

---

34 On définit une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme T_n est appelé le $n^{\text{ème}}$ *polynôme de Tchebychev*. Dans les questions qui suivent, les résultats sont exigés pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) **a)** Déterminer le degré de T_n et calculer son coefficient dominant.
b) Calculer le coefficient constant de T_{2n}.

2) **a)** Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$
b) Montrer que T_n est le seul polynôme de $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la relation **a)** est vraie.
c) En dérivant deux fois la relation **a)**, montrer que $\left(X^2-1\right)T_n'' + XT_n' - n^2T_n = 0$.

3) Déterminer une expression explicite de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ en exploitant la formule de Moivre.

4) Désormais $n \geqslant 1$.
a) Déterminer toutes les racines de T_n dans $[-1, 1]$.
b) En déduire que T_n est scindé sur $\mathbb{R}$.
c) Simplifier enfin le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{2n-1} \cos\frac{(2k+1)\pi}{4n}$.

POLYNÔMES ANNULATEURS DE MATRICES

35 Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{[n]}$ est inversible pour $n \geqslant 2$ et calculer son inverse en exhibant d'abord un polynôme annulateur.

---

36 Calculer les puissances des matrices suivantes en exhibant d'abord pour chacune un polynôme annulateur :

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (degré 2).

2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (degré 2).

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (degré 3).

POLYNÔMES DE LAGRANGE

37 Soient $n \geqslant 2$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ distincts et $L_1, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés. Simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} L_i$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i L_i$.

---

38 On note $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange de $0, \dots, n$.

1) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer le coefficient dominant de L_k au moyen de factorielles.

2) Exprimer de deux manières différentes l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n pour lequel $P(k) = k^n$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

3) En déduire une simplification de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k^n$.

---

39 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ pour lesquels pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
$$\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k P\left(\frac{k}{n}\right).$$

---

40 Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ pour lesquels $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ (resp. $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$).
