1 MODÉLISATION PROBABILISTE

1 On tire une boule dans une urne qui contient pour tout $k \in [\![1,2n]\!]$ exactement k boules de même numéro k. On note N le numéro de la boule tirée.

1) Déterminer la loi et l'espérance de N.
2) Calculer la probabilité de l'événement « $N > n$ ». Quelle limite quand n tend vers $+\infty$?
3) Calculer la probabilité de l'événement « N est pair ». Quelle limite quand n tend vers $+\infty$?

---

2 Une urne contient n boules noires et b blanches. Un joueur tire k boules dans cette urne successivement avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne g points, et sinon il en perd 1. Quelle valeur de g faut-il choisir pour que le jeu soit d'espérance nulle ?

---

3 On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

---

4 Un industriel reçoit d'un fournisseur un lot de n produits de numéros de série $1, 2, \dots, n$. Il contrôle leur bon fonctionnement en les passant en revue les uns après les autres au hasard et sans remise. On note D le numéro de série du dernier produit contrôlé. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de D.

---

5 Il a été constaté empiriquement qu'un certain fleuve déborde de son lit en moyenne une fois tous les 100 ans. Avec quelle probabilité n'observe-t-on aucune crue de ce fleuve sur une période de 100 ans ?

---

6 On tire simultanément k boules d'une urne en contenant n numérotées de 1 à n et on note M le plus grand numéro tiré.

1) Déterminer la loi de M.
2) a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.
   b) En déduire une expression simple de $\mathrm{E}(M)$.

7

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note n la plus grande valeur de X. Montrer l'égalité : $\displaystyle \mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.
2) On lance n fois un dé équilibré à 6 faces et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i le numéro de la face obtenue au $i^{\text{ème}}$ lancer.
   On pose en outre : $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.
   a) Calculer $P(M_n \leqslant k)$ pour tout $k \in [\![1,6]\!]$.
   b) En déduire l'espérance de M_n, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) Étudier la monotonie de la suite $\big(\mathrm{E}(M_n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$. À partir de quel entier n a-t-on : $\mathrm{E}(M_n) \geqslant 5$? On pourra utiliser une calculatrice.

---

8 On choisit une permutation de $[\![1,n]\!]$ au hasard et on note N le nombre de ses points fixes. On note en outre F_i l'événement « La permutation choisie admet i pour point fixe » pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

1) Calculer $P(F_i)$ et $P(F_i \cap F_j)$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.
2) Exprimer N en fonction des événements $F_1, \dots, F_n$, puis en déduire l'espérance de N.
3) a) Calculer $\mathrm{cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j})$ pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$.
   b) En déduire la variance de N.
4) Montrer, grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que : $P(N \geqslant 4) \leqslant \dfrac{1}{9}$.

---

9 Un joueur dispose de n fléchettes pour éclater un ballon. Sa probabilité p de réussite à chaque tir est supposée appartenir à $]0,1[$. On note N le nombre de fléchettes utilisées à l'issue de la partie, que le ballon ait éclaté ou non et sachant que le joueur arrête de lancer ses fléchettes dès que le ballon éclate.

1) Déterminer la loi de N.
2) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, si le ballon a éclaté, avec quelle probabilité a-t-il éclaté avec la $k^{\text{ème}}$ fléchette ?
3) Calculer l'espérance de N. Quelle limite lorsque n tend vers $+\infty$?

---

10 Un sac contient $n-2$ boules blanches et 2 boules vertes. On le vide progressivement au hasard, boule après boule. On note V_1 le rang d'apparition de la première boule bleue et V_2 celui de la deuxième.

1) Déterminer la loi et l'espérance de V_1.
2) a) Déterminer la loi conditionnelle de V_2 sachant $\{V_1 = i\}$ pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$.
   b) En déduire la loi et l'espérance de V_2.

---

11 On choisit une permutation σ au hasard dans S_n et on note L la longueur du cycle dans lequel 1 apparaît quand on décompose σ en produit de cycles disjoints. Montrer que L suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

---

2 MANIPULATION FORMELLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

12 Soient A et B deux événements pour lesquels : $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$. Déterminer la loi, l'espérance et l'écart-type de $\mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_B$.

---

13 Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ avec : $m \leqslant n$ et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![m,n]\!]$.

1) Calculer la variance de U dans le cas où : $m=1$.
2) En déduire la variance de U dans le cas général.

---

14 ◷◷ Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. On pose : $I=\min\left\{U,V\right\}$ et $S=\max\left\{U,V\right\}$.
1) a) Déterminer la loi de I.
b) En déduire l'espérance de I.
2) Les variables I et S sont-elles indépendantes ?
3) Calculer l'espérance de S sans déterminer sa loi.
4) Déterminer la loi du couple (I,S).

---

15 ◷◷◷ Soit $M=(R_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables indépendantes de loi de Rademacher. On pose : $D=\det(M)$.
1) Calculer l'espérance et la variance de D.
2) En déduire : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\Big(|D|\geqslant\sqrt{(n+1)!}\Big)$.

---

16 ◷◷◷
1) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini (Ω,P). Pour tout $y\in Y(\Omega)$, on appelle *espérance conditionnelle de X sachant $\left\{Y=y\right\}$*, notée $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)$, l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle $P_{\{Y=y\}}$. Montrer que : $\mathrm{E}(X)=\sum\limits_{y\in Y(\Omega)}\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)\,P(Y=y)$.
2) Soient $X_1,\ldots,X_n$ et T des variables aléatoires indépendantes. On suppose T à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et $X_1,\ldots,X_n$ de même loi. On pose : $S_T=\sum\limits_{k=1}^{T}X_k$.
a) Montrer que : $\mathrm{E}(S_T)=\mathrm{E}(T)\,\mathrm{E}(X_1)$.
b) On suppose à présent que $X_1,\ldots,X_n$ sont centrées. Montrer que : $\mathrm{V}(S_T)=\mathrm{E}(T)\,\mathrm{V}(X_1)$.

---

3 INÉGALITÉS PROBABILISTES

17 ◷ Soit X une variable aléatoire. Pour quel(s) réel(s) x la quantité $\sqrt{\mathrm{E}\big((X-x)^2\big)}$ est-elle minimale ?

---

18 ◷ Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec : $a\leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$.
1) a) Montrer l'*inégalité de Bathia-Davis* :

$$\mathrm{V}(X)\leqslant\big(b-\mathrm{E}(X)\big)\big(\mathrm{E}(X)-a\big)$$

en factorisant : $\mathrm{V}(X)+\mathrm{E}\big((b-X)(X-a)\big)$.
b) En déduire l'*inégalité de Popoviciu* :

$$\mathrm{V}(X)\leqslant\frac{(b-a)^2}{4}.$$

2) Calculer la variance de $(b-a)X+a$ dans le cas où X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Qu'en déduit-on ?

---

19 ◷ Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec : $0<a\leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$.
1) Montrer que : $\dfrac{1}{X}\leqslant\dfrac{a+b-X}{ab}$.
2) En déduire l'inégalité : $\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4ab}$.

---

20 ◷◷ Soit X une variable aléatoire centrée. Montrer l'inégalité : $\mathrm{E}\big(|X|\big)\leqslant\sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

---

21 ◷◷◷ Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1,1]$. On note σ son écart-type.
1) Montrer que : $P(X\geqslant\alpha)\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$ pour tous $t\geqslant 0$ et $\alpha\geqslant 0$.
2) a) Déterminer le minimum sur $[-1,1]$ de la fonction $u\longmapsto\big(1+u+u^2\big)\mathrm{e}^{-u}$.
b) En déduire que : $\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)\leqslant 1+\sigma^2t^2$ pour tout $t\in[0,1]$.
3) En déduire que : $P(X\geqslant\lambda\sigma)\leqslant\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4}}$ pour tout $\lambda\in[0,2\sigma]$.
4) En déduire que : $P\big(|X|\geqslant\lambda\sigma\big)\leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4}}$ pour tout $\lambda\in[0,2\sigma]$.

---

22 ◷◷◷ Soient X une variable aléatoire réelle et $a>0$.
1) Montrer que : $P\big(X-\mathrm{E}(X)\geqslant a\big)\leqslant\dfrac{t^2+\mathrm{V}(X)}{(t+a)^2}$ pour tout $t\geqslant 0$.
2) En déduire que : $P\big(X-\mathrm{E}(X)\geqslant a\big)\leqslant\dfrac{\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X)+a^2}$.
3) Montrer enfin l'*inégalité de Cantelli* :

$$P\Big(\big|X-\mathrm{E}(X)\big|\geqslant a\Big)\leqslant\frac{2\,\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X)+a^2}$$

et la comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

---

23 ◷◷◷ Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on pose : $\sigma_k=\sigma(X_k)$, $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}X_i$ et : $\sigma=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2}$.
Soit $x>0$ fixé.
1) Montrer que : $P\big(|S_k|\geqslant x\big)\leqslant\dfrac{\sigma^2}{x^2}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.
On pose : $A_k=\big\{|S_k|\geqslant x\big\}\cap\bigcap\limits_{1\leqslant i<k}\big\{|S_i|<x\big\}$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.
2) Exprimer l'événement $\left\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k|\geqslant x\right\}$ en fonction des événements $A_1,\ldots,A_n$.
3) Montrer que : $\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}S_n^2\big)\leqslant\sigma^2$.
4) Montrer que : $\mathrm{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}S_k^2\big)\leqslant\mathrm{E}\big(\mathbb{1}_{A_k}S_n^2\big)$ pour tout $k\in[\![1,n]\!]$.

5) En déduire l'*inégalité maximale de Kolmogorov* :

$$P\Big(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant x\Big) \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}.$$

---

4 LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE

24 On s'intéresse à un jeu dans lequel, sur un total de n numéros, g sont choisis à l'avance comme gagnants par le meneur du jeu et connus de lui seul.

On suppose que : $1 \leqslant g \leqslant \dfrac{n}{3}$.

Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard g numéros, après quoi le meneur dévoile g numéros perdants parmi les $n-g$ que le joueur n'a pas tirés. Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies :

— **Stratégie A :** Il garde les g numéros qu'il a tirés.

— **Stratégie B :** Il échange les g numéros qu'il a tirés contre g nouveaux numéros tirés au hasard parmi les $n-2g$ numéros qui n'ont été ni tirés ni dévoilés pendant la première phase.

1) On note G_1 le nombre de numéros gagnants obtenus à l'issue de la première phase. Déterminer la loi et l'espérance de G_1.

2) On étudie spécifiquement dans cette question la stratégie **B**. On note G_2 le nombre de numéros gagnants obtenus parmi les g numéros tirés pendant la deuxième phase.

a) Déterminer la loi conditionnelle de G_2 sachant $\big\{G_1 = k\big\}$ pour tout $k \in [\![0, g]\!]$, puis l'espérance conditionnelle $\mathrm{E}_{\{G_1=k\}}(G_2)$ de G_2 sachant $\big\{G_1 = k\big\}$, i.e. l'espérance de G_2 pour la probabilité conditionnelle $P_{\{G_1=k\}}$.

b) Montrer l'égalité :

$$\mathrm{E}(G_2) = \sum_{k=0}^{g} \mathrm{E}_{\{G_1=k\}}(G_2)\, P(G_1 = k).$$

c) En déduire que : $\mathrm{E}(G_2) = \dfrac{g^2(n-g)}{n(n-2g)}$.

3) Des stratégies **A** et **B**, laquelle est préférable si l'on veut le plus possible de numéros gagnants ?
