1 MODÉLISATION PROBABILISTE

1 On tire une boule dans une urne qui contient pour tout $k \in [\![1,2n]\!]$ exactement k boules de même numéro k. On note N le numéro de la boule tirée.

1) Déterminer la loi et l'espérance de N.
2) Calculer la probabilité de l'événement « $N > n$ ». Quelle limite quand n tend vers $+\infty$?
3) Calculer la probabilité de l'événement « N est pair ». Quelle limite quand n tend vers $+\infty$?

---

2 Une urne contient n boules noires et b blanches. Un joueur tire k boules dans cette urne successivement avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne g points, et sinon il en perd 1. Quelle valeur de g faut-il choisir pour que le jeu soit d'espérance nulle ?

---

3 On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

---

4 Un industriel reçoit d'un fournisseur un lot de n produits de numéros de série $1,2,\ldots,n$. Il contrôle leur bon fonctionnement en les passant en revue les uns après les autres au hasard et sans remise. On note D le numéro de série du dernier produit contrôlé. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de D.

---

5 Il a été constaté empiriquement qu'un certain fleuve déborde de son lit en moyenne une fois tous les 100 ans. Avec quelle probabilité n'observe-t-on aucune crue de ce fleuve sur une période de 100 ans ?

---

6 On tire simultanément k boules d'une urne en contenant n numérotées de 1 à n et on note M le plus grand numéro tiré.

1) Déterminer la loi de M.
2) a) Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}\binom{i}{k}=\binom{n+1}{k+1}$.
b) En déduire une expression simple de $\mathrm{E}(M)$.

7

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note n la plus grande valeur de X. Montrer l'égalité : $\displaystyle\mathrm{E}(X)=\sum_{k=0}^{n-1}P(X>k)$.
2) On lance n fois un dé équilibré à 6 faces et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note X_i le numéro de la face obtenue au $i^{\text{ème}}$ lancer.
On pose en outre : $M_n=\max\left\{X_1,\ldots,X_n\right\}$.
a) Calculer $P(M_n \leqslant k)$ pour tout $k \in [\![1,6]\!]$.
b) En déduire l'espérance de M_n, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
c) Étudier la monotonie de la suite $\left(\mathrm{E}(M_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$. À partir de quel entier n l'espérance de M_n dépasse-t-elle 5 ? On pourra utiliser une calculatrice.

---

8 Un joueur dispose de n fléchettes pour éclater un ballon. Sa probabilité p de réussite à chaque tir est supposée appartenir à $]0,1[$. On note N le nombre de fléchettes utilisées à l'issue de la partie, que le ballon ait éclaté ou non et sachant que le joueur arrête de lancer ses fléchettes dès que le ballon éclate.

1) Déterminer la loi de N.
2) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, si le ballon a éclaté, avec quelle probabilité a-t-il éclaté avec la $k^{\text{ème}}$ fléchette ?
3) Calculer l'espérance de N. Quelle limite lorsque n tend vers $+\infty$?

---

9 Un sac contient $n-2$ boules blanches et 2 boules vertes. On le vide progressivement au hasard, boule après boule. On note V_1 le rang d'apparition de la première boule bleue et V_2 celui de la deuxième.

1) Déterminer la loi et l'espérance de V_1.
2) a) Déterminer la loi conditionnelle de V_2 sachant $\left\{V_1=i\right\}$ pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$.
b) En déduire la loi et l'espérance de V_2.

---

10 Soit σ une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble S_n des permutations de $[\![1,n]\!]$.

1) On note F le nombre de points fixes de σ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, E_i l'événement $\left\{\sigma(i)=i\right\}$.
a) Calculer $P(E_i)$ et $P(E_i \cap E_j)$ pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$.
b) Exprimer F en fonction des événements $E_1,\ldots,E_n$. En déduire l'espérance de F.
c) Calculer $\mathrm{cov}(\mathbb{1}_{E_i},\mathbb{1}_{E_j})$ pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$. En déduire la variance de F.
d) Montrer que : $P(F \geqslant 4) \leqslant \dfrac{1}{9}$.
2) On note L la longueur du cycle dans lequel 1 apparaît dans la décomposition de σ en produit de cycles disjoints. Montrer que L suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
3) Dans cette question, n n'est plus fixé et on se donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une variable aléatoire σ_n de loi uniforme sur S_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note alors N_n le nombre de cycles de la décomposition de σ_n en produit de cycles disjoints et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_{n,k}$ le nombre de permutations de $[\![1,n]\!]$ dont la décomposition en produit de cycles disjoints contient exactement k cyles.
a) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$:
$$c_{n+1,k}=c_{n,k-1}+nc_{n,k}.$$
b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\mathrm{E}(N_{n+1})=\mathrm{E}(N_n)+\frac{1}{n+1}.$$
c) En déduire un équivalent simple de $\mathrm{E}(N_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

---

2 MANIPULATION FORMELLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

11 Soient A et B deux événements pour lesquels : $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Déterminer la loi, l'espérance et l'écart-type de $\mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_B$.

---

12 Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ avec : $m \leqslant n$ et U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[\![m, n]\!]$.

1) Calculer la variance de U dans le cas où : $m = 1$.
2) En déduire la variance de U dans le cas général.

---

13 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et de même loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Montrer que les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = X - Y$ ne sont pas indépendantes, mais que pourtant : $\mathrm{E}(SD) = \mathrm{E}(S)\,\mathrm{E}(D)$.

---

14 Soient U et V deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et de même loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.
On pose : $I = \min\{U, V\}$ et $S = \max\{U, V\}$.

1) a) Déterminer la loi de I.
   b) En déduire l'espérance de I.
2) Les variables I et S sont-elles indépendantes ?
3) Calculer l'espérance de S sans déterminer sa loi.
4) Déterminer la loi du couple (I, S).

---

15 Soit $M = (R_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables indépendantes de loi de Rademacher. On pose : $D = \det(M)$.

1) Calculer l'espérance et la variance de D.
2) En déduire : $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|D| \geqslant \sqrt{(n+1)!}\right)$.

16

1) Soient X et Y deux variables aléatoires complexes définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P). On suppose que : $P(Y = y) > 0$ pour tout $y \in Y(\Omega)$. On appelle alors *espérance conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$*, notée $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)$, l'espérance de X pour la probabilité $P_{\{Y=y\}}$.
   a) Que vaut $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$ si X et Y sont indépendantes ?
   b) Montrer que : $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{y \in Y(\Omega)} \mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)\, P(Y = y)$.
   Cette formule reste vraie si : $P(Y = y) = 0$ pour certains $y \in Y(\Omega)$. Le réel $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)$ n'est pas défini dans ce cas, mais on peut considérer par convention que : $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)\, P(Y = y) = 0$.
2) Soient $X_1, \ldots, X_n$ et T des variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un même espace probabilisé fini. On suppose T à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ et $X_1, \ldots, X_n$ de même loi.
   On pose : $S_T = \sum\limits_{k=1}^{T} X_k$.
   a) Montrer que : $\mathrm{E}(S_T) = \mathrm{E}(T)\,\mathrm{E}(X_1)$.
   b) On suppose à présent que $X_1, \ldots, X_n$ sont centrées. Montrer que : $\mathrm{V}(S_T) = \mathrm{E}(T)\,\mathrm{V}(X_1)$.

---

17 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires non corrélées définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P) pour lesquelles pour tout $k \in [\![1, n]\!]$: $\sigma(X_k) > 0$.
On pose : $X_0 = 1$.

1) Simplifier $\mathrm{V}\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k X_k\right)$ pour tous $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.
2) En déduire que la famille $(X_0, \ldots, X_n)$ est libre dans $\mathbb{R}^\Omega$, puis que : $|\Omega| \geqslant n + 1$.

---

3 INÉGALITÉS PROBABILISTES

18 Soit X une variable aléatoire. Pour quel(s) réel(s) x la quantité $\sqrt{\mathrm{E}\big((X - x)^2\big)}$ est-elle minimale ?

---

19 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $a \leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$.

1) a) Montrer l'*inégalité de Bathia-Davis* :
$$\mathrm{V}(X) \leqslant \big(b - \mathrm{E}(X)\big)\big(\mathrm{E}(X) - a\big)$$
   en factorisant : $\mathrm{V}(X) + \mathrm{E}\big((b - X)(X - a)\big)$.
   b) En déduire l'*inégalité de Popoviciu* :
$$\mathrm{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$
2) Calculer la variance de $(b-a)X + a$ dans le cas où X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$. Qu'en déduit-on ?

---

20 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec : $0 < a \leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$.

1) Montrer que : $\frac{1}{X} \leqslant \frac{a + b - X}{ab}$.
2) En déduire l'inégalité : $\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab}$.

---

21 Soit X une variable aléatoire centrée. Montrer l'inégalité : $\mathrm{E}\big(|X|\big) \leqslant \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

---

22 Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable pour laquelle : $f'' \leqslant 0$, i.e. *concave*. Soit en outre X une variable aléatoire à valeurs dans I.

1) Montrer que : $f(x) \leqslant f'(a)(x-a) + f(a)$ pour tous $x, a \in I$.
2) Montrer que : $\mathrm{E}(X) \in I$.
3) En déduire que : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) \leqslant f\big(\mathrm{E}(X)\big)$ (*inégalité de Jensen*).

23 ◷◷◷ Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1,1]$. On note σ son écart-type.

1) Montrer que : $P(X \geqslant \alpha) \leqslant e^{-\alpha t}E\left(e^{tX}\right)$ pour tous $t \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$.

2) **a)** Déterminer le minimum sur $[-1,1]$ de la fonction $u \longmapsto \left(1+u+u^2\right)e^{-u}$.

b) En déduire que : $E\left(e^{tX}\right) \leqslant 1+\sigma^2 t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

3) En déduire que : $P(X \geqslant \lambda\sigma) \leqslant e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$ pour tout $\lambda \in [0,2\sigma]$.

4) En déduire que : $P\left(|X| \geqslant \lambda\sigma\right) \leqslant 2\,e^{-\frac{\lambda^2}{4}}$ pour tout $\lambda \in [0,2\sigma]$.

---

24 ◷◷◷ Soient X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1) Montrer que : $P\left(X - E(X) \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{t^2 + V(X)}{(t+a)^2}$ pour tout $t \geqslant 0$.

2) En déduire que : $P\left(X - E(X) \geqslant a\right) \leqslant \dfrac{V(X)}{V(X)+a^2}$.

3) Montrer enfin l'*inégalité de Cantelli* :

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{2\,V(X)}{V(X)+a^2}$$

et la comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

---

25 ◷◷◷ Soient $X_1,\ldots,X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose : $\sigma_k = \sigma(X_k)$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ et : $\sigma = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2}$.

Soit $x > 0$ fixé.

1) Montrer que : $P\left(|S_k| \geqslant x\right) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{x^2}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

On pose : $A_k = \left\{|S_k| \geqslant x\right\} \cap \displaystyle\bigcap_{1\leqslant i<k}\left\{|S_i| < x\right\}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

2) Exprimer l'événement $\left\{\displaystyle\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| \geqslant x\right\}$ en fonction des événements $A_1,\ldots,A_n$.

3) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E\left(\mathbb{1}_{A_k}S_n^2\right) \leqslant \sigma^2$.

4) Montrer que : $E\left(\mathbb{1}_{A_k}S_k^2\right) \leqslant E\left(\mathbb{1}_{A_k}S_n^2\right)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

5) En déduire l'*inégalité maximale de Kolmogorov* :

$$P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}|S_k| \geqslant x\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{x^2}.$$

26

1) Soient Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires complexes définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes et de même loi. Montrer que :

$$\left|E(Z_1)\right|^2 = E\left(Z_1\overline{Z_2}\right).$$

2) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes, de même loi et à valeurs dans un intervalle de longueur t inférieure ou égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

a) Montrer que : $\left|E\left(e^{iX}\right)\right|^2 = E\left(\cos(X-Y)\right)$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\cos x| \geqslant \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.

c) En déduire que : $\left|E\left(e^{iX}\right)\right| \geqslant \max\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos t\right\}$.

3) **a)** Soient $\theta_1,\ldots,\theta_n \in \mathbb{R}$ des réels pour lesquels pour tous $i,j \in [\![1,n]\!]$: $|\theta_i - \theta_j| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Montrer que : $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k}\right| \geqslant \dfrac{n}{\sqrt{2}}$.

b) Représenter graphiquement la situation de la question **a)**. Intuitivement, comment convient-il de choisir les réels $\theta_1,\ldots,\theta_n$ si on veut minimiser la quantité $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k}\right|$?

4) Trouver un exemple de variable aléatoire X pour laquelle : $\left|E\left(e^{iX}\right)\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
