1 FORMULE DE BAYES

1 On dispose de 3 dés équilibrés et de 2 dés truqués pour lesquels la probabilité d'obtenir 6 vaut $\frac{1}{2}$. On choisit l'un des dés au hasard, on le lance et on obtient justement 6. Avec quelle probabilité ce dé est-il équilibré ?

---

2 Dans une population donnée, un individu sur 8 est blond. On sait en outre que deux blonds sur trois ont les yeux bleus et que 80% des individus qui ont les yeux bleus sont blonds. Quelle est la proportion des individus qui ne sont pas blonds mais qui ont les yeux bleus ?

---

3 Dans une certaine usine, trois machines A, B et C produisent respectivement 50%, 30% et 20% des pièces fabriquées. Les pourcentages de pièces défectueuses sont 3% pour A, 4% pour B et 5% pour C. On choisit une pièce fabriquée au hasard, elle se trouve défectueuse. Avec quelle probabilité a-t-elle été fabriquée par la machine A ?

---

4 Un homme et une femme atteints d'une certaine maladie attendent un enfant, lequel a dans ces conditions une probabilité 0,6 d'être lui aussi malade. Un test est effectué sur l'enfant pendant la grossesse, fiable pour 70% des malades et 90% des personnes saines. Le test répond « Non malade ». Avec quelle probabilité l'enfant est-il tout de même malade ?

---

5 Dans une population donnée, deux maladies M_1 et M_2 sont observables chez respectivement 10% et 20% des individus. On suppose que le nombre des malchanceux qui souffrent à la fois de M_1 et M_2 est négligeable — nul, pour simplifier. On entreprend un dépistage systématique de ces maladies au moyen d'un test unique. Ce test est positif pour 90% des malades de M_1, 70% des malades de M_2 et 10% des individus sains.

1) Pour un individu choisi au hasard, avec quelle probabilité le test est-il positif ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pour lequel le test est positif soit atteint de la maladie M_1 ? Même question avec M_2.

---

2 EN VRAC

6 Un événement peut-il être indépendant de lui-même ?

---

7 On lance 5 dés à 6 faces. Avec quelle probabilité le produit des faces obtenues est-il pair ?

---

8 On lance 4 fois de suite un dé usuel à 6 faces. Avec quelle probabilité obtient-on :

1) au moins un 6 ? **2)** exactement un 6 ?

3) au moins 2 faces identiques ?

9

1) Montrer que la probabilité d'obtenir au moins un « 6 » en lançant 4 fois un dé est supérieure à $\frac{1}{2}$.

2) Montrer que la probabilité d'obtenir au moins un double « 6 » en lançant 24 fois deux dés est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Le contraste de ces deux résultats est connu sous le nom de *paradoxe du chevalier de Méré*. Cet écrivain du XVII$^{\text{ème}}$ siècle pensait les deux probabilités précédentes égales à une époque où le calcul des probabilités faisait son apparition. La controverse sera tranchée par le philosophe et mathématicien Pascal à la même époque.

---

10 On dispose de quatre dés A, B, C et D non pipés, connus comme les *dés non transitifs d'Efron* :

— les faces du dé A sont 0, 0, 4, 4, 4, 4,
— les faces du dé B sont 3, 3, 3, 3, 3, 3,
— les faces du dé C sont 2, 2, 2, 2, 6, 6,
— les faces du dé D sont 1, 1, 1, 5, 5, 5.

On lance ces dés simultanément et on note A le numéro obtenu sur le dé A, B le numéro obtenu sur le dé B, etc.

1) Calculer les probabilités : $P(A > B)$, $P(B > C)$, $P(C > D)$ et $P(D > A)$.

2) Deux joueurs s'affrontent à présent. Le joueur 1 choisit le dé qu'il veut parmi les quatre, le joueur 2 choisit le dé qu'il veut parmi les trois restants. Le gagnant est ensuite celui qui obtient le numéro le plus grand avec son dé. Pour gagner, vaut-il mieux être le joueur 1 ou le joueur 2 ?

---

11 On permute aléatoirement les lettres du mot « BAOBAB ». Avec quelle probabilité le mot obtenu est-il encore « BAOBAB » ?

---

12 Une loterie a lieu chaque semaine. On y vend 100 billets de 1€ dont seulement 3 sont gagnants. Si on veut jouer 5€ pour obtenir au moins un billet gagnant, vaut-il mieux acheter 5 billets une même semaine ou un billet par semaine pendant 5 semaines ?

---

13 On choisit simultanément deux entiers distincts entre 1 et n — premier tirage — puis indépendamment, trois entiers distincts entre 1 et n — deuxième tirage.

1) Avec quelle probabilité les entiers tirés au premier tirage le sont-ils aussi au deuxième ?

2) Quelle est la probabilité pour qu'aucun des entiers tirés au premier tirage ne le soit de nouveau au deuxième ?

---

14 ◷◷ Devant un stand publicitaire, n personnes font la queue pour recevoir une confiserie gratuite. Les employés du stand ont k confiseries au chocolat et $n-k$ à la vanille à distribuer, et ils les distribuent au hasard. En quelle position a-t-on intérêt à être situé dans la queue si l'on préfère le chocolat ?

---

15 Une urne contient n boules noires et b blanches que l'on tire toutes une à une sans remise. Calculer la probabilité des événements :

1) ◷ « La première boule tirée est noire, la deuxième blanche ».
2) ◷◷ « On tire chaque fois une boule de couleur différente de la précédente ».

---

16 ◷◷ On tire trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir trois cartes qui sont soit toutes les trois de la même couleur, soit toutes les trois de couleurs différentes sous l'hypothèse :

1) d'un tirage simultané.
2) de tirages successifs sans remise.
3) de tirages successifs avec remise.

---

17 ◷◷ Expliquer pourquoi, lorsqu'on lance 3 dés simultanément, on obtient plus souvent la somme 10 que la somme 9 — alors que ces deux sommes peuvent être obtenues de 6 manières chacune.

---

18 ◷◷ On lance 3 fois de suite un dé usuel à 6 faces. Avec quelle probabilité obtient-on au moins deux faces identiques et une somme paire des trois faces ?

---

19 ◷◷

1) On range k objets dans n tiroirs. Avec quelle probabilité ces objets se retrouvent-ils dans des tiroirs distincts ?
2) À partir de combien de personnes dans un groupe la probabilité que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire est-elle plus grande que $\frac{1}{2}$? Et pour $\frac{9}{10}$? On fera l'hypothèse que le 29 février n'existe pas.
3) Soit $t > 0$. On reprend le contexte de la question **1)** avec : $k = \lfloor t\sqrt{n} \rfloor$ et on note p_n la probabilité de l'événement « Les k objets se retrouvent dans des tiroirs distincts ».
   a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$:
   $$-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x.$$
   b) ◷◷◷ En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} p_n = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

---

20 ◷◷ Dans une fête foraine, on vous propose le jeu suivant — trois verres opaques sont retournés devant vous dont l'un seulement abrite une bille et vous devez deviner lequel.

1) Quelle probabilité avez-vous de deviner juste ?
2) Pris de pitié devant votre malchance à répétition, le maître du jeu décide de vous donner un coup de pouce. Après votre réponse, il vous indique, parmi les deux verres que vous n'avez pas désignés, un verre qui ne contient pas la bille et vous propose de revoir votre réponse. Préférez-vous confirmer votre réponse initiale ou la modifier ?

---

21 ◷◷ Une urne contient 6 boules blanches et 6 noires.

1) Lorsqu'on tire simultanément 8 boules, avec quelle probabilité tire-t-on toutes les blanches ?
2) On répète à présent n fois avec remise l'expérience aléatoire de la question **1)**. À partir de quelle valeur de n la probabilité de tirer toutes les boules blanches est-elle supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

---

22 ◷◷ Au petit-déjeuner, Chou le chaton mange soit des tartines, soit des céréales. S'il se prépare des tartines un matin, il mange de nouveau des tartines le lendemain avec probabilité $\frac{3}{4}$, mais s'il se fait des céréales, il mange des céréales le lendemain avec probabilité $\frac{4}{5}$. Le jour 0, Chou se lève et mange des tartines. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité pour qu'il se fasse des tartines le $n^{\text{ème}}$ jour au petit-déjeuner. Calculer : $\lim_{n\to+\infty} p_n$. Quelle interprétation ?

---

23 Un joueur compulsif joue n parties d'un jeu de probabilité de gain $\frac{2}{3}$. Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note C_k l'événement « Le joueur gagne les $k^{\text{ème}}$ et $(k+1)^{\text{ème}}$ parties et c'était la première fois qu'il gagnait deux parties consécutives » ainsi que p_k la probabilité de C_k.

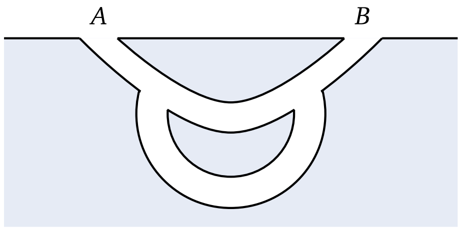
1) ◷ Calculer p_1 et p_2.
2) ◷ On note G_1 l'événement « Le joueur gagne la première partie ». Justifier pour tout $k \in [\![1, n-3]\!]$ l'égalité : $P_{\overline{G_1}}(C_{k+2}) = p_{k+1}$.
3) ◷◷ En déduire que pour tout $k \in [\![1, n-3]\!]$:
   $$p_{k+2} = \frac{1}{3}\, p_{k+1} + \frac{2}{9}\, p_k.$$
4) ◷ En déduire une expression de p_k en fonction de k pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$.

---

24 ◷◷ Smokie le renard poursuit la taupe Cacao pour la croquer. Pour lui échapper, Cacao pénètre son terrier par l'entrée A devant laquelle Smokie fait le guet, et à chaque intersection, elle tourne à gauche ou à droite avec probabilité $\frac{1}{2}$. L'alternative est la suivante :

— Si Cacao sort de son terrier par l'entrée A, Smokie la croque.
— Si Cacao rencontre strictement plus de $2n$ intersections dans son terrier sans en sortir, elle s'épuise et meurt d'inanition.

1) Si Cacao sort de son terrier par l'entrée B, que peut-on dire du nombre d'intersections qu'elle a rencontrées ?
2) Avec quelle probabilité p_n la taupe Cacao parvient-elle à s'extraire de cette situation périlleuse ?
3) Que vaut : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$?



---

25 On effectue k tirages successifs d'une boule dans une urne qui en contient n noires et autant de blanches.

1) Dans cette question, on effectue des tirages AVEC remise. Calculer la probabilité $p_{n,k}$ de tirer exactement une boule blanche.
2) Dans cette question, les boules noires sont tirées AVEC remise tandis que les blanches sont tirées SANS.
   a) Calculer la probabilité $\widehat{p}_{n,k}$ de tirer exactement une boule blanche.
   b) Montrer que : $\widehat{p}_{n,2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2n(\mathrm{e}-1)}{2^{2n}}$, puis comparer avec le résultat de la question **1)**.

---

26 Deux joueurs A et B jouent avec 2 dés équilibrés à 6 faces au jeu suivant :

— A lance les dés, et si la somme des faces obtenue est supérieure ou égale à 8, il a gagné,
— sinon B lance les dés à son tour, et si le maximum des faces qu'il obtient est supérieur ou égal à 4, il a gagné,
— enfin, tant que personne n'a gagné, le jeu recommence à l'identique pendant au plus n parties.

1) Calculer la probabilité d'obtenir une somme des faces supérieure ou égale à 8 avec deux dés.
2) Calculer la probabilité d'obtenir un maximum des faces supérieur ou égal à 4 avec deux dés.
3) Des deux joueurs A et B, lequel a le plus de chances de gagner ?
4) Quelle est la probabilité pour qu'aucun des deux joueurs A et B ne gagne ?

---

3 CHAÎNES DE MARKOV

27 Chou le chaton a trois passions dans la vie — manger, dormir et jouer — et on peut considérer qu'il pratique ces activités par tranches de 5min.

— Après 5min de repas, il continue de manger les 5min suivantes avec probabilité $\dfrac{1}{2}$ et sinon il se met à jouer.
— Après 5min de somme, il continue de dormir les 5min suivantes avec probabilité $\dfrac{3}{4}$ et sinon il a faim au réveil et va manger.
— Après 5min de jeu, soit il est en appétit et mange les 5min suivantes avec probabilité $\dfrac{1}{4}$, soit il est fatigué et s'endort.

Un matin, Chou se lève et passe ses 5 premières minutes à petit-déjeuner. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note m_n la probabilité pour qu'il mange entre les minutes $5n$ et $5n+5$, d_n la probabilité pour qu'il dorme et j_n la probabilité pour qu'il joue, et enfin on pose : $C_n = \begin{pmatrix} m_n \\ d_n \\ j_n \end{pmatrix}$.

1) Trouver une matrice $M\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $C_{n+1} = MC_n$.
2) a) Calculer $4M^3-5M^2$, puis en déduire un polynôme annulateur P de M.
   b) Calculer les puissances de M.
   c) En déduire les limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} j_n$. Qu'en déduit-on sur la journée de Chou ?

---

4 FORMULE DU CRIBLE

28 On lance un dé équilibré à 6 faces n fois de suite.

1) Calculer la probabilité de l'événement « La face i n'apparaît jamais » pour tout $i\in[\![1,6]\!]$.
2) Calculer la probabilité de l'événement « Chacune des faces 1, 2 et 3 apparaît au moins une fois ».

---

29 Quand on lance un dé tétraédrique — i.e. à 4 faces — 3 faces sont visibles et une seule reste cachée. On lance un tel dé n fois de suite.

1) Calculer pour tout $i\in[\![1,4]\!]$ la probabilité de l'événement « À chaque lancer, la $i^{\text{ème}}$ face est visible ».
2) Calculer la probabilité de l'événement « Chaque face est restée cachée au moins une fois ».

---

30 On forme un mot de 7 lettres à partir des 26 lettres de l'alphabet. Avec quelle probabilité le mot « OUI » apparaît-il au moins une fois quelque part dans ce mot ?

31

1) On appelle *dérangement de* $[\![1,n]\!]$ toute permutation sans point fixe de $[\![1,n]\!]$. On notera D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]$ et, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, F_k l'ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$ qui fixent k. Montrer, en appliquant la formule du

crible aux ensembles $F_1, \ldots, F_n$, l'égalité : $|D_n| = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

2) Un joyeux groupe de n amis est réuni pour fêter Noël. Chacun a apporté un cadeau et l'a posé près du grand sapin. À minuit, on distribue au hasard un cadeau à chacun des convives, éventuellement celui qu'il a apporté. On s'intéresse à l'événement E « Personne n'a reçu son propre cadeau ». À combien estimez-vous intuitivement la probabilité de E lorsque n est grand ? Calculer effectivement la probabilité de E, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$. On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.