1 En vrac

1 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les expressions suivantes : **1)** $3^{n+2} - 3^{n+1} - 7 \times 3^n + 5 \times 3^{n-1}$. **2)** $\dfrac{6^3 \times 2^{-5}}{4^2 \times 12^{-4}}$. **3)** $\dfrac{4^n 3^{2n} - 1}{2^n 3^n + 1}$. **4)** $\dfrac{32 \times 8^{n-1}}{2^{2n+2} - 4^n}$. **5)** $\dfrac{5^n \times 12^2}{10^n \times 6^4}$. **6)** $\dfrac{16^{n+1} + (-4)^{2n+1} + (-2)^{4n}}{8^n}$.

---

2 Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de x, y et $|x-y|$, une expression explicite :
1) de : $\max\{x,y\} + \min\{x,y\}$,
2) de : $\max\{x,y\} - \min\{x,y\}$,
3) puis de : $\max\{x,y\}$ et $\min\{x,y\}$

---

3 Montrer par récurrence que pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$: $1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \dfrac{1}{1+nx}$.

---

2 Majorations/minorations

4 Proposer un encadrement des quantités suivantes :
1) $\dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + \sqrt{x+2} + 3}$ pour $x \in [-1,1]$.
2) $\dfrac{x - y^2 + 3}{x^2 + y^2 - y}$ pour tous $x, y \in [1,2]$.

5
1) Quelle est la valeur minimale sur $[1, +\infty[$ de la fonction $x \longmapsto x^2 - x + 1$?
2) En déduire un exemple de réel $\lambda > 0$ pour lequel pour tout $x \geqslant 1$: $\dfrac{x + \sqrt{x}}{x^2 - x + 1} \leqslant \lambda x$.

6
1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2} = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-2)}{\sqrt{x}+2}.$$

2) En déduire que pour tout $x \in [0,2] \setminus \{1\}$:

$$\left|\frac{x^2 - 3x + 2}{x + \sqrt{x} - 2}\right| \leqslant 2.$$

---

3 Équations, inéquations

7 Résoudre les équations suivantes d'inconnue x :
1) $|4 - x| = x$. **2)** $\left|x^2 + x - 3\right| = |x|$.
3) $|x+2| + |3x-1| = 4$. **4)** $\sqrt{1-2x} = |x+7|$.
5) $x|x| = 3x + 2$. **6)** $x + 5 = \sqrt{x+11}$.
7) $x = 1 + \sqrt{x^2 - 2}$. **8)** $x + |x| = \dfrac{2}{x}$.

---

8 Résoudre en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = a$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

---

9 Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x :
1) $\left|x^2 - 6x + 4\right| \leqslant 1$. **2)** $x + 2 < |2x - 5|$.
3) $\dfrac{x}{x+1} \leqslant \dfrac{x+2}{x+3}$. **4)** $|3x - 5| \leqslant |2x + 3|$.
5) $|x - 1| \leqslant |2x + 1| + 1$. **6)** $x + 3 \leqslant \sqrt{x+5}$.
7) $\dfrac{x+5}{x^2-1} \geqslant 1$. **8)** $x + \dfrac{1}{x} \leqslant |x+4| + 3$.
9) $x^2 - 4|x| + 3 > 0$. **10)** $|x+3| > \left|x^2 - 3\right|$.
11) $\sqrt{|x+2|} \leqslant |x-10|$. **12)** $\sqrt{x^2-1} < 2 - x$.

---

4 Inégalités et substitutions

10 Soient $x, y \geqslant 0$.
1) Montrer que : $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$.
2) En déduire que si $x \geqslant y$: $\sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant \sqrt{x-y}$.
3) En déduire que : $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

11
1)
a) Montrer que pour tout $x > 0$: $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.
b) En déduire que pour tous $x, y, z > 0$ de somme s :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant 6 - s.$$

2) **a)** Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

b) En déduire que pour tous $x, y, z \geqslant 0$:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 8xyz.$$

c) En déduire, après avoir développé le produit : $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$, que pour tous $x, y, z > 0$ de somme s :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant \frac{9}{s}.$$

3) Des inégalités **1)b)** et **2)c)**, l'une est-elle meilleure que l'autre, et si oui laquelle ?

12
1) Montrer que pour tous $x, y \geqslant 0$:

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}.$$

2)

a) En déduire que pour tous $x, y > 0$:

$$\frac{x}{x^4 + y^2} \leqslant \frac{1}{2xy}.$$

b) En déduire que pour tous $x, y > 0$:

$$\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^4} \leqslant \frac{1}{xy}.$$

13

1) Montrer que pour tous $x, y > 0$:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2.$$

2) En déduire que pour tous $a, b, c > 0$:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2} \qquad (\textit{inégalité de Nesbitt}).$$

3) À quelle condition les inégalités des questions **1)** et **2)** sont-elle des égalités ?
