1 PRÉLIMINAIRES SUR LES FONCTIONS

1 ◷ On note f la fonction $x \longmapsto x^2$, g la fonction $x \longmapsto x+1$ et h la fonction $x \longmapsto e^x$. Déterminer une expression explicite des fonctions suivantes :

1) $f \circ g \circ h$. **2)** $g \circ f \circ h$.
3) $h \circ g \circ f$. **4)** $f \circ h \circ g$.

---

2 ◷

1) Montrer que la somme de deux fonctions majorées (resp. bornées) est majorée (resp. bornée).
2) Montrer que le produit de deux fonctions croissantes peut ne pas être une fonction monotone.
3) Montrer que le produit de deux fonctions croissantes **POSITIVES** est une fonction croissante.
4) Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut n'être ni croissante ni décroissante.

3

1) ◷ Tracer rapidement à main levée, en justifiant, l'allure du graphe des fonctions :
   a) $x \longmapsto \sqrt{3x-2}-1$.
   b) $x \longmapsto \dfrac{5}{2x+1}+3$.
2) ◷◷ Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Décrire comment, à partir du graphe de f, on peut tracer le graphe des fonctions :
   a) $x \longmapsto f(a-x)$. b) $x \longmapsto a-f(x)$.

---

4 ◷◷ Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction — pas dérivable a priori. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x)\,e^{f(x)} = x$. Déterminer les variations de f.

---

2 ÉTUDE DE FONCTIONS TRÈS USUELLES

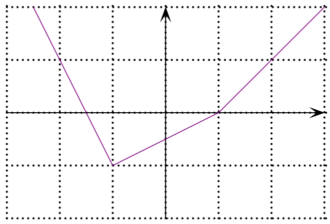
5 ◷ Déterminer une expression explicite de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :

1) Le graphe de f coupe l'axe des abscisses en 3 et a pour pente 2.
2) Le graphe de f passe par le point de coordonnées $(2,3)$ et : $f'(-2)=4$.
3) Le graphe de f passe par les points de coordonnées $(-1,2)$ et $(2,1)$.

---

6 ◷

1) Tracer le graphe des fonctions :
   a) $x \longmapsto 2|x-1|-|x+1|$.
   b) $x \longmapsto x|x-1|+|2-x|-x^2$.
2) Déterminer une expression explicite par morceaux de la fonction représentée ci-dessous.



---

7 ◷ Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité des fonctions :

1) $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{\ln x}}{\ln\left(4x-x^2\right)}$. **2)** $x \longmapsto \dfrac{\ln(1-\ln x)}{\sqrt{2-|x-3|}}$.

3) $x \longmapsto \dfrac{\ln\left(x^2-4\right)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$. **4)** $x \longmapsto x\sqrt{2-\sqrt{x}}$.

5) $x \longmapsto \sqrt{e^x+2e^{-x}-3}$.

---

8 ◷◷ Étudier chacune des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{x^3}{x^2-3}$. **2)** $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{\ln|x|}{x}}$.

3) $x \longmapsto \ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

---

9 ◷

1) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la dérivée et les variations de la fonction $x \longmapsto a^x$ sur $\mathbb{R}$.
2) Résoudre l'équation : $2^x+3^x=5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

---

10 ◷

1) Soient I un intervalle, $u \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$ strictement positive et $v \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$. Montrer que u^v est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
2) On note f la fonction $x \longmapsto x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   a) Déterminer le tableau des variations de f avec limites aux bornes.
   b) Déterminer une équation de la tangente de f en 1 ainsi que la position relative du graphe de f par rapport à cette tangente.

---

11 ◷◷

1) Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose que f'' est positive ou nulle sur I.
   a) Que peut-on dire de l'allure du graphe de f ?
   b) Montrer que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
2) En appliquant le résultat de la question **1)b)**, montrer que :
   a) pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geqslant x+1$.
   b) pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln x \leqslant x-1$.
   c) pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt{x} \leqslant \dfrac{x+1}{2}$.

---

12 Montrer, en étudiant une fonction BIEN CHOISIE, que :
1) ◷ pour tout $x \in]-\infty, 1]$: $e^x \leqslant 1+x+\frac{ex^2}{2}$.
2) ◷◷ pour tout $x \in]0,1[$: $x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$.
3) ◷◷◷ pour tout $x > 0$:

$$x\ln x-(x-1) \geqslant \frac{3(x-1)^2}{2(x+2)}.$$

---

13 Soit $\alpha \in [0,1]$.
1) ◷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$(1+x)^\alpha \leqslant 1+\alpha x.$$

2) ◷◷ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geqslant (n+1)^\alpha.$$

---

14 ◷◷◷ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$:

$$e^x \geqslant \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

---

15 ◷◷ Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

---

16 ◷◷◷
1) ◷ Étudier la monotonie de $t \longmapsto \frac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) En déduire, pour tous $a,b>0$ avec $a \leqslant b$, la monotonie de $x \longmapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) En déduire que pour tous $a,b>0$:

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2.$$

---

17 ◷◷ Pour tout $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation :

$$y=\sqrt{x^2-1}$$

d'inconnue $x \in [1,+\infty[$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité ?

---

3 FONCTIONS sh, ch ET th

18 ◷ Pour tous $x,y \in \mathbb{R}$, montrer que :
1) $\text{sh}(x+y)=\text{sh}\,x\,\text{ch}\,y+\text{ch}\,x\,\text{sh}\,y$.
2) $\text{ch}(x+y)=\text{ch}\,x\,\text{ch}\,y+\text{sh}\,x\,\text{sh}\,y$.
3) $\text{th}(x+y)=\frac{\text{th}\,x+\text{th}\,y}{1+\text{th}\,x\,\text{th}\,y}$.

---

19 Montrer que :
1) ◷ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\text{sh}\,x \geqslant x$.
2) ◷ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\text{ch}\,x \geqslant 1+\frac{x^2}{2}$.
3) ◷◷◷ pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\text{th}\,x| \geqslant \frac{|x|}{1+|x|}$.

---

20 ◷◷
1) Résoudre l'équation : $y=\text{sh}\,x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité ?
2) Même question avec la fonction th.
3) Même question ave la fonction ch.

---

21 ◷◷ Simplifier $\sum_{k=0}^n \text{ch}(kx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

22
1) ◷ Que vaut : $\lim_{x\to 0} \frac{\text{th}\,x}{x}$?
2) ◷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}(2x)=\frac{2\,\text{th}\,x}{1+\text{th}^2 x}.$$

3) ◷◷◷ Étudier : $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \left(1+\text{th}^2\frac{x}{2^k}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

---

4 UTILISATIONS DU TVI

23 ◷ Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales : **1)** $x \longmapsto x^5-x^3+1$.
2) $x \longmapsto 4x^3-18x^2+24x-9$.

---

24 ◷
1) Montrer que l'équation : $x\ln x=1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution.
2) Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\text{ch}\,x}$ possède un unique point fixe dans $\mathbb{R}$.
3) Montrer que l'équation : $e^{-x^2}=e^x-1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution.

---

25 ◷◷ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{e^x-1}{x} \geqslant x+e-2.$$
