

1 PRÉLIMINAIRES SUR LES FONCTIONS

1 ⌚ On note f la fonction $x \mapsto x^2$, g la fonction $x \mapsto x + 1$ et h la fonction $x \mapsto e^x$. Déterminer une expression explicite des fonctions suivantes :

- 1) $f \circ g \circ h$. 2) $g \circ f \circ h$.
 3) $h \circ g \circ f$. 4) $f \circ h \circ g$.
-

2 ⌚

- Montrer que la somme de deux fonctions majorées (resp. bornées) est majorée (resp. bornée).
- Montrer que le produit de deux fonctions croissantes peut ne pas être une fonction monotone.
- Montrer que le produit de deux fonctions croissantes **POSITIVES** est une fonction croissante.
- Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut n'être ni croissante ni décroissante.

3 ⌚

- Tracer rapidement à main levée, en justifiant, l'allure du graphe des fonctions :
 - $x \mapsto \sqrt{3x-2} - 1$.
 - $x \mapsto \frac{5}{2x+1} + 3$.
- Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. Décrire comment, à partir du graphe de f , on peut tracer le graphe des fonctions :
 - $x \mapsto f(a-x)$.
 - $x \mapsto a - f(x)$.

4 ⌚⌚ Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction — pas dérivable a priori. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) e^{f(x)} = x$. Déterminer les variations de f .

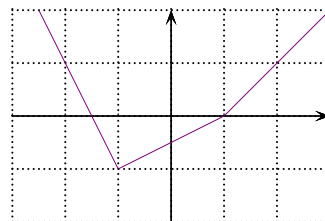
2 ÉTUDE DE FONCTIONS TRÈS USUELLES

5 ⌚ Déterminer une expression explicite de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :

- Le graphe de f coupe l'axe des abscisses en 3 et a pour pente 2.
- Le graphe de f passe par le point de coordonnées (2, 3) et : $f'(-2) = 4$.
- Le graphe de f passe par les points de coordonnées (-1, 2) et (2, 1).

6 ⌚

- Tracer le graphe des fonctions :
 - $x \mapsto 2|x-1| - |x+1|$.
 - $x \mapsto x|x-1| + |2-x| - x^2$.
- Déterminer une expression explicite par morceaux de la fonction représentée ci-dessous.



7 ⌚ Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité des fonctions :

- $x \mapsto \frac{\sqrt{\ln x}}{\ln(4x-x^2)}$.
 - $x \mapsto \frac{\ln(1-\ln x)}{\sqrt{2-|x-3|}}$.
 - $x \mapsto \frac{\ln(x^2-4)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$.
 - $x \mapsto x\sqrt{2-\sqrt{x}}$.
 - $x \mapsto \sqrt{e^x + 2e^{-x} - 3}$.
-

8 ⌚⌚ Étudier chacune des fonctions suivantes :

- $x \mapsto \frac{x^3}{x^2-3}$.
 - $x \mapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$.
 - $x \mapsto \ln \frac{1+x}{1-x}$.
-

9 ⌚

- Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la dérivée et les variations de la fonction $x \mapsto a^x$ sur \mathbb{R} .
- Résoudre l'équation : $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

10 ⌚

- Soient I un intervalle, $u \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ strictement positive et $v \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Montrer que u^v est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
- On note f la fonction $x \mapsto x^x$ sur \mathbb{R}_+^* .
 - Déterminer le tableau des variations de f avec limites aux bornes.
 - Déterminer une équation de la tangente de f en 1 ainsi que la position relative du graphe de f par rapport à cette tangente.

11 ⌚⌚

- Soient I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On suppose f'' positive ou nulle sur I .
 - Que peut-on dire de l'allure du graphe de f ?
 - Montrer que le graphe de f est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
- En appliquant le résultat de la question 1)b), montrer que :
 - pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \geq x + 1$.
 - pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $\ln x \leq x - 1$.
 - pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$.

12 Montrer, en étudiant une fonction BIEN CHOISIE, que :

- 1) ☺ pour tout $x \in]-\infty, 1]$: $e^x \leq 1 + x + \frac{ex^2}{2}$.
- 2) ☺☺ pour tout $x \in]0, 1[$: $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.
- 3) ☺☺☺ pour tout $x > 0$:

$$x \ln x - (x-1) \geq \frac{3(x-1)^2}{2(x+2)}.$$

13 Soit $\alpha \in [0, 1]$.

- 1) ☺ Montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x.$$

- 2) ☺☺ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha.$$

14 ☺☺☺ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$:

$$e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}.$$

15 ☺☺ Montrer que pour tout $n \geq 2$:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

16 ☺☺☺

- 1) ☺ Étudier la monotonie de $t \mapsto \frac{(1+t)\ln(1+t)}{t}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- 2) En déduire, pour tous $a, b > 0$ avec : $a \leq b$, la monotonie de $x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ sur \mathbb{R}_+^* .
- 3) En déduire que pour tous $a, b > 0$:

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

17 ☺☺ Pour tout $y \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation :

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

d'inconnue $x \in [1, +\infty[$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité ?

3 FONCTIONS sh, ch ET th

18 ☺ Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que :

- 1) $\text{sh}(x+y) = \text{sh } x \text{ ch } y + \text{ch } x \text{ sh } y$.
 - 2) $\text{ch}(x+y) = \text{ch } x \text{ ch } y + \text{sh } x \text{ sh } y$.
 - 3) $\text{th}(x+y) = \frac{\text{th } x + \text{th } y}{1 + \text{th } x \text{ th } y}$.
-

19 Montrer que :

- 1) ☺ pour tout $x \geq 0$: $\text{sh } x \geq x$.
 - 2) ☺ pour tout $x \geq 0$: $\text{ch } x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.
 - 3) ☺☺☺ pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\text{th } x| \geq \frac{|x|}{1+|x|}$.
-

20 ☺☺

- 1) Résoudre l'équation : $y = \text{sh } x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Qu'en déduit-on en termes de bijectivité ?
 - 2) Même question avec la fonction th.
 - 3) Même question avec la fonction ch.
-

21 ☺☺ Simplifier $\sum_{k=0}^n \text{ch}(kx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

22

- 1) ☺ Que vaut : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{th } x}{x}$?
- 2) ☺ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{th}(2x) = \frac{2 \text{ th } x}{1 + \text{th}^2 x}.$$

- 3) ☺☺☺ Étudier : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \text{th}^2 \frac{x}{2^k}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
-

4 UTILISATIONS DU TVI

- 23 ☺ Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales :
- 1) $x \mapsto x^5 - x^3 + 1$.
 - 2) $x \mapsto 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$.
-

24 ☺

- 1) Montrer que l'équation : $x \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution.
 - 2) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\text{ch } x}$ possède un unique point fixe dans \mathbb{R} .
 - 3) Montrer que l'équation : $e^{-x^2} = e^x - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution.
-

25 ☺☺ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\frac{e^x - 1}{x} \geq x + e - 2.$$
