VOCABULAIRE USUEL

1

1) Montrer que la fonction $x \longmapsto x - \frac{1}{x}$ est injective sur $\mathbb{R}_+^*$. Et sur $\mathbb{R}^*$?
2) a) La fonction $x \longmapsto x\,\mathrm{e}^x$ est-elle injective sur $\mathbb{R}$?
   b) Déterminer son image.
3) Déterminer l'image de la fonction $x \longmapsto x^n \ln x$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4) a) Sur quels intervalles les plus grands possible)la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{x^2+x+1}$ est-elle injective ?
   b) Déterminer $f\big(]-2,4]\big)$.

---

2 Tracer rapidement l'allure du graphe des fonctions :

1) $x \longmapsto \sqrt{3x-4}$. 2) $x \longmapsto \frac{5}{2x+1}$.
3) $x \longmapsto 1+\ln(2-x)$.

---

3 On note f la fonction $x \longmapsto \sqrt{2-x}$.

1) Tracer rapidement l'allure du graphe de f.
2) Déterminer les points fixes de f et montrer que $[0,2]$ et $[-2,2]$ sont stables par f.

4

1) Montrer, grâce au TVI strictement monotone, que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{x^3-1}$ est bijective de $[1,+\infty[$ sur son image (à préciser).
2) Retrouver le résultat de la question **1)** et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1,+\infty[$.

---

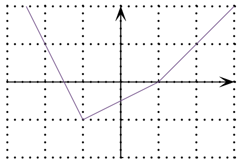
5 Montrer que la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est bijective de $[1,+\infty[$ sur son image (à préciser) et déterminer une expression explicite de sa réciproque.

6

1) Que dire de la dérivée d'une fonction dérivable paire ? impaire ? périodique ?
2) Montrer que :
   a) la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut ne pas être monotone.
   b) la somme de deux fonctions majorées (resp. bornées) est majorée (resp. bornée). Et le produit ?

7

1) Déterminer une expression explicite de la fonction affine f dans chacun des cas suivants :
   a) Le graphe de f coupe l'axe des abscisses en 3 et a pour pente 2.
   b) Le graphe de f passe par les points de coordonnées $(-1,2)$ et $(2,1)$.
2) a) Tracer le graphe de $x \longmapsto 2|x-1| - |x+1|$.
   b) Déterminer une expression par morceaux de la fonction représentée ci-contre.



---

8 Déterminer les ensembles de définition, continuité et dérivabilité des fonctions :

1) $x \longmapsto \sqrt{\ln x}$. 2) $x \longmapsto \sqrt{\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x} - 3}$.
4) $x \longmapsto \sqrt{2-|x-3|}$. 5) $x \longmapsto \frac{\ln\left(x^2-4\right)}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$.

9

1) Étudier la parité/imparité, les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité de $x \longmapsto \frac{x^3}{x^2-3}$.
2) Même question avec $x \longmapsto \sqrt{\frac{\ln|x|}{x}}$, mais sans la convexité/concavité.

---

10 Déterminer le nombre de racines réelles des fonctions polynomiales : 1) $x \longmapsto x^5 - x^3 + 1$.
2) $x \longmapsto 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9$.

LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET PUISSANCES

11 Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la dérivée $k^{\text{ème}}$ des fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

12

1) Étudier les variations, les limites aux bornes et la convexité/concavité de la fonction $x \longmapsto x^x$.
2) Combien l'équation $y = x^x$ d'inconnue $x > 0$ possède-t-elle de solutions pour tout $y \in \mathbb{R}$?

13

1) Résoudre l'équation $2^x + 3^x = 5$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que l'équation $x \ln x = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ possède une et une seule solution.
3) Montrer que l'équation $\mathrm{e}^{-x^2} = \mathrm{e}^x - 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une et une seule solution.
4) Combien la fonction $x \longmapsto 1 + \frac{x}{\ln x}$ possède-t-elle de points fixes ?
5) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

14

1) Comparer $(1+x)^\alpha$ et $1+\alpha x$ pour tous $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x > -1$.

2) En déduire que pour tous $\alpha \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{\alpha}{k}\right) \geqslant (n+1)^{\alpha}.$$

---

15 🕑🕑 Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

---

16 🕑🕑

1) Le prix de mon café augmente de 20% cette année, de 5% l'année prochaine et de 25% l'année suivante. En moyenne, de quel pourcentage a-t-il augmenté chaque année sur cette période ?

2) Soient $x_1,\dots,x_n > 0$. On pose :

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \quad (\textit{moyenne arithmétique})$$

et : $$g = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \quad (\textit{moyenne géométrique}).$$

Montrer l'*inégalité arithmético-géométrique* $g \leqslant m$ en simplifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1\right)$.

---

17 Montrer que :

1) 🕑 pour tout $x \leqslant 1$: $\quad \mathrm{e}^x \leqslant 1+x+\dfrac{\mathrm{e}x^2}{2}$.

2) 🕑🕑 pour tout $x \in]0,1[$: $\quad x^x(1-x)^{1-x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

3) 🕑🕑 pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\quad \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} \geqslant x+\mathrm{e}-2$.

4) 🕑🕑🕑 pour tout $x > 0$:

$$x\ln x-(x-1) \geqslant \frac{3(x-1)^2}{2(x+2)}.$$

---

18 🕑🕑

1) Étudier sur $[1,+\infty[$:

a) le signe de $x \longmapsto (x-1)\ln(1+x)-x\ln x$.

b) les variations de $x \overset{\varphi}{\longmapsto} \ln(1+x)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

2) En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ tout entier.

3) En déduire que pour tous $a,b>0$:

$$\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2.$$

---

19 🕑🕑 Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$ et on note f la fonction $x \longmapsto \ln\dfrac{1+qx}{1-px}$.

1) Étudier les variations de f et ses limites aux bornes.

2) Montrer que pour tout x bien choisi :

$$f\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}-x\right) = 2\ln\frac{q}{p}-f(x).$$

Qu'en déduit-on sur le graphe de f ?

---

20 🕑🕑 Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction pour laquelle $f\,\mathrm{e}^f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_+}$. Étudier les variations de f.

---

21 🕑🕑🕑 Montrer que $\mathrm{e}^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$.

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

22 🕑 Soient $x,y \in \mathbb{R}$.

1) Montrer que $\mathrm{sh}(x+y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y+\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$, puis en déduire une relation analogue sur $\mathrm{ch}(x+y)$.

3) Exprimer $\mathrm{th}(x+y)$ en fonction de $\mathrm{th}\,x$ et $\mathrm{th}\,y$.

---

23 Montrer que :

1) 🕑 pour tout $x \geqslant 0$: $\quad \mathrm{sh}\,x \geqslant x \quad$ et $\quad \mathrm{ch}\,x \geqslant 1+\dfrac{x^2}{2}$.

2) 🕑🕑🕑 pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |\mathrm{th}\,x| \geqslant \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

---

24 🕑🕑

1) Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression explicite de sa réciproque.

2) Même question avec th de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

3) Même question avec ch de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$.

---

25 🕑🕑🕑 Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{ch}(2kx) = \frac{\mathrm{sh}\big((n+1)x\big)}{\mathrm{sh}\,x}\,\mathrm{ch}(nx).$$

26

1) 🕑 Que vaut $\displaystyle\lim_{u\to 0}\frac{\mathrm{th}\,u}{u}$? Vérifier que $\mathrm{th}(2x) = \dfrac{2\,\mathrm{th}\,x}{1+\mathrm{th}^2 x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2) 🕑🕑🕑 En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+\mathrm{th}^2\frac{x}{2^k}\right) = \frac{x}{\mathrm{th}\,x}.$$

CALCULS DE LIMITES

27 🕑🕑

1) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+x)}{x^2+1}$. **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{sh}\,x}{\sqrt{\mathrm{ch}(2x)}}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}+1}$ $\quad(\alpha,\beta \in \mathbb{R})$.

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$.

e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x^{\alpha}}-\sqrt{x^2+1}\right)$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R})$.

2) a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{x^{\alpha}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$. **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{\mathrm{e}^{2x}+x-1}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^{\beta}-1}{x^{\alpha}-1}$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R}^*,\ \beta \in \mathbb{R})$.

3) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\mathrm{sh}(3x)}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\mathrm{sh}(3x)}$.

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{\ln(\mathrm{e}^x+1)}$.

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha}-1}{\ln x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^{\alpha}-1}{\ln x}$ $\quad(\alpha \in \mathbb{R})$.
