RELATIONS BINAIRES QUELCONQUES

1 ⌚⌚ Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. Pour tous $x,x'\in E$, on dit que $x\,\mathscr{R}^{\mathrm{tr}}\,x'$ si :

$$\exists n\in\mathbb{N}^*,\quad \exists x_0,x_1,\ldots,x_n\in E,$$
$$x=x_0 \text{ et } x'=x_n \quad\text{et}\quad \forall k\in[\![0,n-1]\!],\ x_k\,\mathscr{R}\,x_{k+1}.$$

La relation $\mathscr{R}^{\mathrm{tr}}$ ainsi définie est appelée la *clôture transitive de* $\mathscr{R}$.

1) Montrer que $\mathscr{R}^{\mathrm{tr}}$ est transitive.
2) Montrer que si $\mathscr{R}$ est réflexive, $\mathscr{R}^{\mathrm{tr}}$ l'est aussi.
3) Montrer que si $\mathscr{R}$ est symétrique, $\mathscr{R}^{\mathrm{tr}}$ l'est aussi.

RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

2 ⌚ Pour tous $z,z'\in\mathbb{C}$, on dit que $z\sim z'$ si $|z|=|z'|$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$ et déterminer ses classes d'équivalence.

---

3 Pour tous $x,y\in\mathbb{R}_+^*$, on dit que $x\sim y$ si $\dfrac{\ln x}{y}=\dfrac{\ln y}{x}$.

1) ⌚ Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) ⌚⌚ Combien la classe d'équivalence de x pour $\sim$ contient-elle d'éléments pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$?

---

4 Soient E un ensemble et A une partie de E. Pour tous $X,Y\in\mathscr{P}(E)$, on dit que $X\simeq Y$ si $X\cap A=Y\cap A$.

1) ⌚ Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
2) ⌚⌚ Exhiber une bijection de $\mathscr{P}(A)$ sur l'ensemble quotient $\mathscr{P}(E)\big/\simeq$.

---

5 ⌚⌚ Soient E et F deux ensembles et $f:E\longrightarrow F$ une application. Pour tous $x,x'\in E$, on dit que $x\equiv_f x'$ si $f(x)=f(x')$.

1) Montrer que la relation $\equiv_f$ est une relation d'équivalence et décrire pour tout $x\in E$ la classe d'équivalence $\overline{x}$ de x pour $\equiv_f$.
2) Justifier la bonne définition de l'application $\overline{f}$ de $E\big/\equiv_f$ dans F qui, pour tout $x\in E$, associe à $\overline{x}$ l'élément $f(x)$.
3) Montrer que $\overline{f}$ est injective.

RELATIONS D'ORDRE

6 ⌚ Pour tous $x,y\in\mathbb{N}$, on dit que $x\preccurlyeq y$ si $y=x^n$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cette relation est-elle totale ?

---

7 ⌚⌚ Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

1) Pour tous couples $(x,y),(x',y')\in E\times E$, on dit que $(x,y)\preccurlyeq^\circ(x',y')$ si $x\preccurlyeq x'$ et $y\preccurlyeq y'$.
   a) Montrer que $\preccurlyeq^\circ$ est une relation d'ordre.
   b) Montrer que si E possède au moins deux éléments, $\preccurlyeq^\circ$ n'est pas totale.
2) Pour tous couples $(x,y),(x',y')\in E\times E$, on dit que $(x,y)\preccurlyeq^\star(x',y')$ si :
$$x\prec x' \quad\text{ou}\quad \big(x=x' \text{ et } y\preccurlyeq y'\big).$$
   a) Montrer que $\preccurlyeq^\star$ est une relation d'ordre. On l'appelle l'*ordre lexicographique sur* $E\times E$ *(issu de* $\preccurlyeq$*)*.
   b) Montrer que si $\preccurlyeq$ est totale, $\preccurlyeq^\star$ l'est aussi.
3) Dans cette question $E=\mathbb{R}$ et $\preccurlyeq$ est la relation usuelle $\leqslant$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (x,y) pour $\leqslant^\circ$ et $\leqslant^\star$.

---

8 ⌚⌚ On travaille dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ muni de la relation d'inclusion $\subset$. L'ensemble $\big\{[\varepsilon,+\infty[\ \big|\ \varepsilon>0\big\}$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

---

9 ⌚⌚ On travaille dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité $|$. L'ensemble $\big\{2^n\ \big|\ n\in\mathbb{N}\big\}$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?
