1 Relations binaires quelconques

1 ◷◷ Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On définit sur E une relation $\mathcal{R}^{\text{tr}}$ sur E, appelée la *clôture transitive de* $\mathcal{R}$, en posant pour tous $x, x' \in E$:

$$x \,\mathcal{R}^{\text{tr}}\, x' \iff \exists\, n \in \mathbb{N}^*/ \quad \exists\, x_0, x_1, \ldots, x_n \in E/$$
$$x = x_0 \quad \text{et} \quad x' = x_n \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ x_k \,\mathcal{R}\, x_{k+1}.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}^{\text{tr}}$ est transitive.
2) Montrer que si $\mathcal{R}$ est réflexive, $\mathcal{R}^{\text{tr}}$ l'est aussi.
3) Montrer que si $\mathcal{R}$ est symétrique, $\mathcal{R}^{\text{tr}}$ l'est aussi.

---

2 Relations d'équivalence

2 ◷ On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ en posant pour tous $(p,q),(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$(p,q) \sim (p',q') \iff pq' = p'q.$$

Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

---

3 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On définit une relation $\equiv_f$ sur E en posant pour tous $x, y \in E$: $\quad x \equiv_f y \iff f(x) = f(y).$

1) ◷ Montrer que la relation $\equiv_f$ est une relation d'équivalence et décrire ses classes d'équivalence.
2) ◷◷◷ Pour tout $x \in E$, on note $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x pour $\equiv_f$. Les éléments de $\overline{x}$ ont par définition la même valeur par f, qu'on note $\overline{f}(\overline{x})$. On définit ainsi une application $\overline{f}$ de $E/\equiv_f$ dans F. Montrer que $\overline{f}$ est injective.

---

3 Relations d'ordre

4 ◷ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit une relation $\leqslant_f$ sur $\mathbb{R}$ en posant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \leqslant_f y \iff f(y) - f(x) \geqslant |y - x|.$$

1) Montrer que $\leqslant_f$ est une relation d'ordre.
2) Montrer que $\leqslant_f$ est totale si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \big|f(y) - f(x)\big| \geqslant |y - x|.$$

3) À quoi la relation $\leqslant_{\mathrm{Id}_\mathbb{R}}$ est-elle égale ?

---

5 ◷ On définit sur $\mathbb{N}$ une relation $\preccurlyeq$ en posant pour tous $x, y \in \mathbb{N}$:

$$x \preccurlyeq y \iff \exists\, n \in \mathbb{N}/ \quad y = x^n.$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cette relation est-elle totale ?

---

6 ◷ Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

1) On définit une relation $\preccurlyeq^\circ$ sur $E \times E$ en posant pour tous $(x,y),(x',y') \in E \times E$:

$$(x,y) \preccurlyeq^\circ (x',y') \iff x \preccurlyeq x' \ \text{ et } \ y \preccurlyeq y'.$$

a) Montrer que $\preccurlyeq^\circ$ est une relation d'ordre.
b) Montrer que si E possède au moins deux éléments, $\preccurlyeq^\circ$ n'est pas totale.

2) On définit une relation $\preccurlyeq^\star$ sur $E \times E$ en posant pour tous $(x,y),(x',y') \in E \times E$:

$$(x,y) \preccurlyeq^\star (x',y') \iff x \prec x'$$
$$\text{ou } \big(x = x' \ \text{ et } \ y \preccurlyeq y'\big).$$

a) Montrer que $\preccurlyeq^\star$ est une relation d'ordre. On appelle cet ordre l'*ordre lexicographique sur* $E \times E$ *(issu de* $\preccurlyeq$*)*.
b) Montrer que si $\preccurlyeq$ est totale, alors $\preccurlyeq^\star$ l'est aussi.

3) On se place désormais dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et où $\preccurlyeq$ est l'ordre naturel $\leqslant$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (x,y) pour $\leqslant^\circ$ et $\leqslant^\star$.

---

7 ◷◷ On travaille dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ muni de la relation d'inclusion $\subset$. L'ensemble $\left\{\left[-\dfrac{1}{n}, n\right]\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède-t-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?

---

8 ◷◷ On travaille dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité $|$. L'ensemble $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

---

9 ◷◷ On note E l'ensemble des couples (I, f) constitués d'un intervalle I et d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit sur E une relation $\preccurlyeq$ en posant pour tous $(I,f),(J,g) \in E$:

$$(I,f) \preccurlyeq (J,g) \iff I \subset J \quad \text{et} \quad g\big|_I = f.$$

1) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
2) L'ensemble des couples $\big([\varepsilon, +\infty[, \ln\big)$, ε décrivant $\mathbb{R}_+^*$, possède-t-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?
