1 RELATIONS BINAIRES QUELCONQUES

1 Soient E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur E. On définit sur E une relation $\mathcal{R}^{\text{tr}}$ sur E, appelée la *clôture transitive de* $\mathcal{R}$, en posant pour tous $x, x' \in E$:

$$x \,\mathcal{R}^{\text{tr}}\, x' \iff \exists\, n \in \mathbb{N}^*/ \quad \exists\, x_0, x_1, \ldots, x_n \in E/$$
$$x = x_0 \quad \text{et} \quad x' = x_n \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!], \ x_k \,\mathcal{R}\, x_{k+1}.$$

1) Montrer que $\mathcal{R}^{\text{tr}}$ est transitive.
2) Montrer que si $\mathcal{R}$ est réflexive, $\mathcal{R}^{\text{tr}}$ l'est aussi.
3) Montrer que si $\mathcal{R}$ est symétrique, $\mathcal{R}^{\text{tr}}$ l'est aussi.

---

2 RELATIONS D'ÉQUIVALENCE

2 On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{C}$ en posant pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$: $\quad z \sim z' \iff |z| = |z'|$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}$ et déterminer ses classes d'équivalence.

---

3 On définit une relation $\sim$ sur $\mathbb{R}_+^*$ en posant pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$: $\quad x \sim y \iff \dfrac{\ln x}{y} = \dfrac{\ln y}{x}$.

1) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Combien la classe d'équivalence de x pour $\sim$ contient-elle d'éléments pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$?

---

4 Soient E un ensemble et $A \in \mathscr{P}(E)$. On définit une relation $\simeq$ sur $\mathscr{P}(E)$ en posant pour tous $X, Y \in \mathscr{P}(E)$: $X \simeq Y \iff X \cap A = Y \cap A$.

1) Montrer que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{P}(E)$.
2) Exhiber une bijection de $\mathscr{P}(A)$ sur l'ensemble quotient $\mathscr{P}(E)/\!\simeq$.

---

5 Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On définit une relation $\equiv_f$ sur E en posant pour tous $x, y \in E$: $\quad x \equiv_f y \iff f(x) = f(y)$.

1) Montrer que la relation $\equiv_f$ est une relation d'équivalence et déterminer ses classes d'équivalence.
2) Justifier la bonne définition de l'application $\overline{f}$ de $E/\!\equiv_f$ dans F qui, pour tout $x \in E$, associe à $\overline{x}$ l'élément $f(x)$.
3) Montrer que $\overline{f}$ est injective.

---

3 RELATIONS D'ORDRE

6 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On définit une relation $\leqslant_f$ sur $\mathbb{R}$ en posant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x \leqslant_f y \iff f(y) - f(x) \geqslant |y - x|.$$

1) Montrer que $\leqslant_f$ est une relation d'ordre.
2) Montrer que $\leqslant_f$ est totale si et seulement si :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \big|f(y) - f(x)\big| \geqslant |y - x|.$$

3) À quoi la relation $\leqslant_{\text{Id}_{\mathbb{R}}}$ est-elle égale ?

---

7 On définit sur $\mathbb{N}$ une relation $\preccurlyeq$ en posant pour tous $x, y \in \mathbb{N}$: $\quad x \preccurlyeq y \iff \exists\, n \in \mathbb{N}/ \quad y = x^n$. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cette relation est-elle totale ?

---

8 Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

1) On définit une relation $\preccurlyeq^\circ$ sur $E \times E$ en posant pour tous $(x, y), (x', y') \in E \times E$:

$$(x, y) \preccurlyeq^\circ (x', y') \iff x \preccurlyeq x' \ \text{et} \ y \preccurlyeq y'.$$

a) Montrer que $\preccurlyeq^\circ$ est une relation d'ordre.
b) Montrer que si E possède au moins deux éléments, $\preccurlyeq^\circ$ n'est pas totale.

2) On définit une relation $\preccurlyeq^\star$ sur $E \times E$ en posant pour tous $(x, y), (x', y') \in E \times E$:

$$(x, y) \preccurlyeq^\star (x', y') \iff x \prec x' \quad \text{ou} \quad \big(x = x' \ \text{et} \ y \preccurlyeq y'\big).$$

a) Montrer que $\preccurlyeq^\star$ est une relation d'ordre. On appelle cet ordre l'*ordre lexicographique sur* $E \times E$ *(issu de* $\preccurlyeq$*)*.
b) Montrer que si $\preccurlyeq$ est totale, alors $\preccurlyeq^\star$ l'est aussi.

3) On se place désormais dans le cas où : $\quad E = \mathbb{R}$ et où $\preccurlyeq$ est l'ordre naturel $\leqslant$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement l'ensemble des majorants de (x, y) pour $\leqslant^\circ$ et $\leqslant^\star$.

---

9 On travaille dans $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ muni de la relation d'inclusion $\subset$. L'ensemble $\left\{\left[-\dfrac{1}{n}, n\right]\right\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède-t-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?

---

10 On travaille dans $\mathbb{N}$ muni de la relation de divisibilité $|$. L'ensemble $\{2^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possède-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ?

---

11 On note E l'ensemble des couples (I, f) constitués d'un intervalle I et d'une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On définit sur E une relation $\preccurlyeq$ en posant pour tous $(I, f), (J, g) \in E$:

$$(I, f) \preccurlyeq (J, g) \iff I \subset J \quad \text{et} \quad g_{|I} = f.$$

1) Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
2) L'ensemble des couples $\big([\varepsilon, +\infty[, \ln\big)$, ε décrivant $\mathbb{R}_+^*$, possède-t-il un plus grand élément ? une borne supérieure ?
