1 DÉCOUVERTE DES MATRICES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Écrire les matrices des applications linéaires suivantes (dans les bases canoniques) :

1) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2x). \end{array}\right.$
2) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \big(P(1), P'(1)+P''(0)\big). \end{array}\right.$
3) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP+P'+P(1). \end{array}\right.$
4) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ P & \longmapsto & \big(\overline{P(1+i)}, \mathrm{Re}\big(P(i)\big)\big) \end{array}\right.$ sur le corps de base $\mathbb{R}$, dans les bases $(1, i, X, iX)$ et $\big((1,0),(i,0),(0,1),(0,i)\big)$.

2

1) On note f l'endomorphisme :
$$P \longmapsto P(X+1)+P(X-1)-2P(X)$$
de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis en déduire $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
2) Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.
3) Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
4) L'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ de matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
dans la base canonique est-il surjectif ?

---

3 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose :
$$\mathscr{B} = \big(\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}\big) \qquad \text{et} \qquad V = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}).$$

1) a) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de V.
   b) Montrer que V est stable par dérivation.

On note alors D l'endomorphisme de V induit par la dérivation et M la matrice de D dans $\mathscr{B}$.

2) a) Déterminer la matrice de D dans $\mathscr{B}$.
   b) Montrer que D est un automorphisme de V et déterminer sans calcul la matrice de D^{-1} dans $\mathscr{B}$.

---

4 On note $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $\binom{j-1}{i-1}$ — on rappelle que : $\binom{q}{p} = 0$ si $p > q$.

1) Montrer que A est inversible.
2) Donner une expression simple de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique.
3) En déduire A^{-1}.

---

5 Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que :
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que : $\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, M^2$ et $\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Im}\, M^2$.
2) En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles, puis dégager de tout cela une contradiction.

---

2 CHANGEMENT DE BASES ET MATRICES ÉQUIVALENTES/SEMBLABLES

6 On note u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ par :
$$u(x,y,z,t) = \big(2x-y+z+5t, -x+2y+3z-4t, x+5z+6t\big).$$

1) Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques.
2) Montrer que les familles :
$$\mathscr{B} = \big((1,0,0,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1),(1,0,0,1)\big)$$
et $\mathscr{C} = \big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big)$ sont des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.
3) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.

---

7 On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le système linéaire : $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.
2) Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, avec : $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (-1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$.
3) Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans (e_1, e_2, e_3).
4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

8 On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le système linéaire : $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

2) Montrer que la famille (e_1,e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, avec : $e_1=(3,1,0)$, $e_2=(-1,1,1)$ et $e_3=(0,1,1)$.
3) Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans (e_1,e_2,e_3).
4) En déduire A^n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

---

9 ◷ On note φ l'endomorphisme :

$$P\longmapsto (X+2)P'(X)+P(X-1)$$

de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer l'image par φ des vecteurs 1, $X+1$ et $2X^2+4X+3$. Qu'en déduit-on ?

---

10 ◷◷ Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

1) $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}.$

2) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\4&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$

3) $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}.$

---

11 ◷◷ Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r.
1) Montrer que A est semblable à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix}B&0\\C&0\end{pmatrix}$ pour certaines $B\in\mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ et $C\in\mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$.
2) On suppose que $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$. Montrer qu'on peut imposer à C d'être nulle dans la question précédente.

---

12 ◷◷ On pose : $A=\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-7&-4\\15&9\end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables et déterminer toutes les matrices $P\in\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles : $B=P^{-1}AP$.

---

13 ◷◷ On note f l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$. Montrer que dans une certaine base de $\mathbb{R}^2$, la matrice de f est diagonale.

---

14 ◷◷ On note φ l'endomorphisme :

$$P\longmapsto \left(X^2+2\right)P''+(X+1)P'+P$$

de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que la matrice de φ est diagonale dans une certaine base de $\mathbb{R}_2[X]$.

---

15 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f\in\mathscr{L}(E)$. On suppose que : $f^n=0_{\mathscr{L}(E)}$ mais : $f^{n-1}\neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que dans une certaine base de E, f a pour matrice $\begin{pmatrix}0&\cdots&0\\I_{n-1}&&\vdots\\&&0\end{pmatrix}$.

16
1) ◷◷◷ On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Montrer que dans une certaine base de $\mathbb{R}^3$ à préciser, f a pour matrice $\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
2) ◷◷ On pose : $M=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.
a) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
b) Montrer que M est semblable à son inverse.

---

17 ◷◷◷ Montrer que les matrices $\begin{pmatrix}1&1&-1\\-3&-3&3\\-2&-2&2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ sont semblables.

---

18 ◷◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f\in\mathscr{L}(E)$. On suppose que : $f^2=f^3$.
1) Montrer que si : $\operatorname{rg}\big(f-\mathrm{Id}_E\big)=2$, alors dans une certaine base de E, f a pour matrice :

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{ou}\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

2) Plus généralement, montrer que dans une certaine base de E, f a pour matrice :

$$I_3,\quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{ou}\quad 0.$$

---

19 ◷◷◷ Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer que : $\operatorname{rg}\big(A^2\big)=r$ si et seulement si A est semblable à $\begin{pmatrix}B&0\\0&0\end{pmatrix}$ pour une certaine matrice $B\in\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

---

20 ◷◷
1) Pour tout $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note t_A la forme linéaire $M\longmapsto \operatorname{tr}(AM)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note en outre t l'application $A\longmapsto t_A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{L}\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\mathbb{K}\big)$.

a) Montrer que t est linéaire.
b) Montrer, en utilisant la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, que t est un isomorphisme.

2) Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
a) Justifier l'existence d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle pour laquelle :

$$H = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) / \quad \mathrm{tr}(AM) = 0 \right\}.$$

b) Pour tout $r \in [\![0,n]\!]$, on pose : $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Trouver une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle : $\mathrm{tr}(J_r M) = 0$.
c) En déduire que H contient au moins une matrice inversible.

---

21 ◷◷◷ Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des $g \in \mathscr{L}(F,E)$ pour lesquelles : $fgf = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$. Calculer la dimension de $\mathscr{G}$.
Indication : On pourra introduire des bases de E et F dans lesquelles f a une matrice très simple et étudier $\mathscr{G}$ matriciellement.

---

22 ◷◷◷ On dispose de 2 urnes. La première contient 1 boule blanche et 1 noire, et la seconde 2 blanches et 1 noire. On prélève simultanément une boule dans chacune des deux urnes et on les change d'urne. Cette expérience est répétée un nombre indéfini de fois.
On pose : $X_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de boules blanches dans la première urne à l'issue du $k^{\text{ème}}$ échange.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X_{k+1} en fonction de la loi de X_k.

2) On pose : $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $C_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix}$.
a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $C_{k+1} = MC_k$.
b) Déterminer une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ dans laquelle $P^{-1}MP$ est diagonale.
c) En déduire : $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = x)$ pour tout $x \in [\![0,2]\!]$.

---

3 TRACE D'UN ENDOMORPHISME

23 ◷◷ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la trace des endomorphismes suivants :

1) l'endomorphisme $P \longmapsto P(aX+b)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) **a)** l'endomorphisme $M \longmapsto {}^t\!M$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
b) l'endomorphisme $M \longmapsto {}^t\!M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
3) l'endomorphisme $M \longmapsto AM$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
