Découverte des matrices d'applications linéaires

1 Écrire les matrices des applications linéaires suivantes dans les bases canoniques :

1) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y, 2x). \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \big(P(1), P'(1)+P''(0)\big). \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP+P'+P(1). \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ P & \longmapsto & \big(\overline{P(1+\mathrm{i})}, \mathrm{Re}\big(P(\mathrm{i})\big)\big) \end{array}\right.$ mais attention, sur le corps $\mathbb{R}$ dans les bases $(1, \mathrm{i}, X, \mathrm{i}X)$ et $\big((1,0),(\mathrm{i},0),(0,1),(0,\mathrm{i})\big)$.

2

1) Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.

2) Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ de matrice :
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
dans la base canonique.

3) L'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ de matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
dans la base canonique est-il surjectif ?

4) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 de base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Caractériser géométriquement l'endomorphisme de E de matrice :
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -7 & 8 & 7 \\ 6 & -6 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathscr{B}.$$

---

3 Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose :
$$\mathscr{B} = \big(\sin, \cos, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}\big) \qquad \text{et} \qquad V = \mathrm{Vect}(\mathscr{B}).$$

1) **a)** Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de V.
b) Montrer que V est stable par dérivation.

On note D l'endomorphisme de V induit par la dérivation et M la matrice de D dans $\mathscr{B}$.

2) **a)** Déterminer la matrice de D dans $\mathscr{B}$.
b) Montrer que D est un automorphisme de V et calculer de tête la matrice de D^{-1} dans $\mathscr{B}$.

---

4 On note $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $\dbinom{j-1}{i-1}$, i et j décrivant $[\![1, n+1]\!]$.

1) Montrer que A est inversible.

2) Donner une expression simple de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique.

3) En déduire A^{-1}.

---

5 Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que :
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\, M = \mathrm{Ker}\, M^2$ et $\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Im}\, M^2$.

2) En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles, puis dégager de tout cela une contradiction.

Changements de bases, équivalence et similitude

6 On note u l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ définie pour tout $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ par :
$$u(x,y,z,t) = \big(2x-y+z+5t, -x+2y+3z-4t, x+5z+6t\big).$$

1) Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques.

2) Montrer que les familles :
$$\mathscr{B} = \big((1,0,0,0),(0,0,1,1),(1,1,1,1),(1,0,0,1)\big)$$
et $\mathscr{C} = \big((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\big)$ sont des bases de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

3) Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.

---

7 On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) On pose $e_1 = (3,1,0)$, $e_2 = (-1,1,1)$ et $e_3 = (0,1,1)$ — en lien avec la question **1)** en principe ! Pourquoi la famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

3) Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans (e_1, e_2, e_3).

4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

8 On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2) On pose $e_1 = (1,0,1)$, $e_2 = (-1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$ — en lien avec la question **1)** en principe ! Pourquoi la famille (e_1, e_2, e_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

3) Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans (e_1, e_2, e_3).

4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

9 Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

---

10 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r.

1) Montrer que A est semblable à une matrice par blocs $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ avec $B \in \mathscr{M}_r(\mathbb{K})$ et $C \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$.

2) On suppose à présent $\mathrm{Im}A$ et $\mathrm{Ker}A$ supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$. Montrer qu'on peut imposer à C d'être nulle. Que peut-on alors dire de B ?

---

11 On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$. Montrer que A et B sont semblables et déterminer toutes les matrices $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles $B = P^{-1}AP$.

---

12 On note φ l'endomorphisme :

$$P \longmapsto (X+2)\,P'(X) + P(X-1)$$

de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer l'image par φ des vecteurs 1, $X+1$ et $2X^2+4X+3$. Qu'en déduit-on ?

---

13 Montrer que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

---

14 On note φ l'endomorphisme :

$$P \longmapsto \left(X^2+2\right)P'' + (X+1)\,P' + P$$

de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que φ est diagonalisable.

---

15 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ f nilpotent d'indice n. Montrer que dans une certaine base de E, f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ I_{n-1} & & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

---

16 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice 2.

1) Montrer que $\dim \mathrm{Ker} f = 2$.

2) En déduire que dans une certaine base de E, f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

17

1) On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que dans une certaine base de $\mathbb{R}^3$, f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.

b) Montrer que M est semblable à son inverse.

---

18 Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

---

19 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f^2 = f^3$.

1) Montrer que $E = \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \oplus \mathrm{Ker}\, f^2$.

2) Montrer que si $\mathrm{rg}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) = 2$, alors dans une certaine base de E, f a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Plus généralement, montrer que dans une certaine base de E, f a pour matrice :

$$0,\ I_3,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

---

20 Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Montrer que $\mathrm{rg}\left(A^2\right) = r$ si et seulement si A est semblable à $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour une certaine matrice $B \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$.

21

1) Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note t_A la forme linéaire $M \longmapsto \mathrm{tr}(AM)$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note en outre t l'application $A \longmapsto t_A$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{L}\left(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K}\right)$.

a) Montrer que t est linéaire.

b) Montrer que t est un isomorphisme.

2) Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a) Justifier l'existence d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle pour laquelle :

$$H = \left\{ M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \quad \mathrm{tr}(AM) = 0 \right\}.$$

b) Pour tout $r \in [\![0, n]\!]$, on pose $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Trouver une matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle $\mathrm{tr}(J_r M) = 0$.

c) En déduire que H contient au moins une matrice inversible.

---

22 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies non nulles et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On note $\mathscr{G}$ l'ensemble des applications $g \in \mathscr{L}(F,E)$ pour lesquelles $fgf = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$. Calculer la dimension de $\mathscr{G}$.

---

23 On dispose de 2 urnes. La première contient 1 boule blanche et 1 noire, et la seconde 2 blanches et 1 noire. On prélève simultanément une boule dans chacune des deux urnes et on les change d'urne. Cette expérience est répétée un nombre indéfini de fois.
On pose $X_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de boules blanches dans la première urne à l'issue du $k^{\text{ème}}$ échange.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X_{k+1} en fonction de la loi de X_k.

2) On pose $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $C_{k+1} = MC_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) Déterminer une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dans laquelle $P^{-1}MP$ est diagonale.

c) En déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} P(X_k = x)$ pour tout $x \in [\![0, 2]\!]$.

TRACE D'UN ENDOMORPHISME

24 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la trace des endomorphismes suivants :

1) l'endomorphisme $P \longmapsto P(aX + b)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) **a)** l'endomorphisme $M \longmapsto M^\top$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

b) l'endomorphisme $M \longmapsto M^\top$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3) l'endomorphisme $M \longmapsto AM$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
