

1 DÉCOUVERTE DES MATRICES D'APPLICATIONS LINÉAIRES

1 ☉ Écrire les matrices des applications linéaires suivantes (dans les bases canoniques) :

- 1) $\begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, x - y, 2x). \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P'(1) + P''(0)). \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}_3[X] \\ P & \longmapsto & XP + P' + P(1). \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} \mathbb{C}_1[X] & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ P & \longmapsto & (\overline{P(1+i)}, \operatorname{Re}(P(i))) \end{cases}$ sur le corps de base \mathbb{R} , dans les bases $(1, i, X, iX)$ et $((1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i))$.

2 ☉ 1) On note f l'endomorphisme :

$$P \longmapsto P(X + 1) + P(X - 1) - 2P(X)$$

de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis en déduire $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

- 2) Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire de $\mathbb{R}_2[X]$ dans \mathbb{R}^2 de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques.
- 3) Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
- 4) L'endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$ de matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique est-il surjectif?

3 ☉ ☉ Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose :

$$\mathcal{B} = (\sin, \cos, \operatorname{sh}, \operatorname{ch}) \quad \text{et} \quad V = \operatorname{Vect}(\mathcal{B}).$$

- 1) a) Montrer que \mathcal{B} est une base de V .
- b) Montrer que V est stable par dérivation.

On note alors D l'endomorphisme de V induit par la dérivation et M la matrice de D dans \mathcal{B} .

- 2) a) Déterminer la matrice de D dans \mathcal{B} .
- b) Montrer que D est un automorphisme de V et déterminer sans calcul la matrice de D^{-1} dans \mathcal{B} .

4 ☉ ☉ On note $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice de terme général $\begin{pmatrix} j-1 \\ i-1 \end{pmatrix}$ — on rappelle que : $\binom{q}{p} = 0$ si $p > q$.

- 1) Montrer que A est inversible.
- 2) Donner une expression simple de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de matrice A dans la base canonique.
- 3) En déduire A^{-1} .

5 ☉ ☉ Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On suppose que :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Montrer que : $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Ker} M^2$
et $\operatorname{Im} M = \operatorname{Im} M^2$.
- 2) En déduire que la première colonne et la dernière ligne de M sont nulles, puis dégager de tout cela une contradiction.

2 CHANGEMENT DE BASES ET MATRICES ÉQUIVALENTES/SEMBLABLES

6 ☉ ☉ On note u l'application linéaire de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R}^3 définie pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ par :

$$u(x, y, z, t) = (2x - y + z + 5t, -x + 2y + 3z - 4t, x + 5z + 6t).$$

- 1) Déterminer la matrice de u dans les bases canoniques.
- 2) Montrer que les familles :

$$\mathcal{B} = ((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 1))$$

et $\mathcal{C} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ sont des bases de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 respectivement.

- 3) Déterminer $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$.

7 ☉ ☉ On pose : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Résoudre pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le système linéaire : $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.
- 2) Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 , avec : $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (-1, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 1)$.
- 3) Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans (e_1, e_2, e_3) .
- 4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8 ☉ ☉ On pose : $A = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

- 1) Résoudre pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le système linéaire : $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

- 2) Montrer que la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de \mathbb{R}^3 , avec : $e_1 = (3, 1, 0)$, $e_2 = (-1, 1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$.
- 3) Déterminer la matrice A' de l'endomorphisme canoniquement associé à A dans (e_1, e_2, e_3) .
- 4) En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9 ☉ On note φ l'endomorphisme :

$$P \mapsto (X + 2)P'(X) + P(X - 1)$$

de $\mathbb{R}_2[X]$. Calculer l'image par φ des vecteurs $1, X + 1$ et $2X^2 + 4X + 3$. Qu'en déduit-on ?

10 ☉☉ Montrer que les matrices suivantes sont semblables :

- 1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

11 ☉☉ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r .

- 1) Montrer que A est semblable à une matrice de la forme : $\begin{pmatrix} B & 0 \\ C & 0 \end{pmatrix}$ pour certaines $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{K})$.
- 2) On suppose que $\text{Im } A$ et $\text{Ker } A$ sont supplémentaires dans \mathbb{K}^n . Montrer qu'on peut imposer à C d'être nulle dans la question précédente.

12 ☉☉ On pose : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$.

Montrer que A et B sont semblables et déterminer toutes les matrices $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ pour lesquelles : $B = P^{-1}AP$.

13 ☉☉ On note f l'endomorphisme canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que dans une certaine base de \mathbb{R}^2 , la matrice de f est diagonale.

14 ☉☉ On note φ l'endomorphisme :

$$P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$$

de $\mathbb{R}_2[X]$. Montrer que la matrice de φ est diagonale dans une certaine base de $\mathbb{R}_2[X]$.

15 ☉☉ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $f^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ mais : $f^{n-1} \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que dans une certaine

base de E , f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ & I_{n-1} & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

16 1) ☉☉☉ On note f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mon-

trer que dans une certaine base de \mathbb{R}^3 à préciser,

f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2) ☉☉ On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que M est inversible et calculer son inverse.
- b) Montrer que M est semblable à son inverse.

17 ☉☉☉ Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.

18 ☉☉☉ Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que : $f^2 = f^3$.

1) Montrer que si : $\text{rg}(f - \text{Id}_E) = 2$, alors dans une certaine base de E , f a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Plus généralement, montrer que dans une certaine base de E , f a pour matrice :

$$I_3, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } 0.$$

19 ☉☉☉ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r . Montrer que : $\text{rg}(A^2) = r$ si et seulement si A est semblable à $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pour une certaine matrice $B \in \text{GL}_r(\mathbb{K})$.

20 ☉☉ 1) Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note t_A la forme linéaire $M \mapsto \text{tr}(AM)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note en outre t l'application $A \mapsto t_A$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.

- a) Montrer que t est linéaire.
 b) Montrer, en utilisant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, que t est un isomorphisme.
 2) Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 a) Justifier l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle pour laquelle :

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \operatorname{tr}(AM) = 0\}.$$

- b) Pour tout $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose : $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Trouver une matrice $M \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle : $\operatorname{tr}(J_r M) = 0$.
 c) En déduire que H contient au moins une matrice inversible.

- 21** ☺☺☺ Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note \mathcal{G} l'ensemble des $g \in \mathcal{L}(F, E)$ pour lesquelles : $f g f = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$. Calculer la dimension de \mathcal{G} .

Indication : On pourra introduire des bases de E et F dans lesquelles f a une matrice très simple et étudier \mathcal{G} matriciellement.

3 TRACE D'UN ENDOMORPHISME

- 22** ☺☺ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la trace des endomorphismes suivants :
- 1) l'endomorphisme $P \mapsto P(aX + b)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
 - 2) a) l'endomorphisme $M \mapsto {}^t M$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
 b) l'endomorphisme $M \mapsto {}^t M$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - 3) l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.