APPRENTISSAGE DE LA SYNTAXE

1 Énoncer proprement, après avoir introduit les objets utilisés :
1) la définition d'une fonction dérivable.
2) le théorème qui lie la croissance d'une fonction à la positivité de sa dérivée.
3) le théorème des valeurs intermédiaires.

---

2 Vrai ou faux ? Justifier.
1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 2 \implies x \geqslant 3.$
2) $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2, \quad x < y \implies \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}.$
3) $\exists x \in \mathbb{R}_+, \quad x < \sqrt{x}.$
4) $\forall x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \neq x' \implies \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{x'+1}{x'-1}.$
5) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k \geqslant N.$
6) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + x \geqslant 0 \implies x \geqslant 0.$

---

3 Traduire dans un français éclairant les propositions suivantes — i.e. mettant en évidence leur sens intuitif — puis déterminer leur valeur de vérité.
1) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & \exists N \in \mathbb{N}, & n \leqslant N. \\ \exists N \in \mathbb{N}, & \forall n \in \mathbb{N}, & n \leqslant N. \end{cases}$
2) $\begin{cases} \forall y \geqslant 0, & \exists x \in \mathbb{R}, & y = x^2. \\ \exists x \in \mathbb{R}, & \forall y \geqslant 0, & y = x^2. \end{cases}$

---

4 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :
1) f est périodique.
2) f est majorée.
3) f est constante.
4) f atteint tous les réels.
5) f est croissante.
6) f possède un minimum.
7) f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.
8) f s'annule au plus une fois.

---

5 Écrire en langage mathématique l'ensemble :
1) des entiers naturels divisibles par 7.
2) des sommes de deux carrés d'entiers.
3) des entiers relatifs qui possèdent un antécédent par la fonction $x \longmapsto e^x + x$.

RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

6
1) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = 3^n - 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = n(n-1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

7 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, puis qu'elle converge et calculer sa limite.

---

8 Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

9 On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
1) Montrer que $a_n \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que $a_n \geqslant \sqrt{n+1}$ pour tout $n \geqslant 2$.

---

10 Enquête, conjecture, récurrence !
1) Déterminer une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
   a) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 - u_n$.
   b) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.
   c) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = (n+4)u_n$.
   d) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (n+2)^2 u_n$.
   e) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2(n+1)u_n$.
2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \begin{cases} u_{\frac{n}{2}}^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ z \times u_{\frac{n-1}{2}}^2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$
3) Déterminer une expression de la famille $(z_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ définie pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ par $z_{0,j} = 1$ et :
   a) $z_{i+1,j} = z_{i,j} + 1$.
   b) $z_{i+1,j} = 2z_{i,j+1}$.
   c) $z_{i+1,j} = (i+j)z_{i,j+1}$.

---

11 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers $a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbb{N}$ pour lesquels :
$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}.$$

---

12 Montrer que tout entier supérieur ou égal à 8 peut être écrit $3a + 5b$ pour certains $a, b \in \mathbb{N}$.

---

13 Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Dans chacune des situations suivantes, est-il vrai que $A = \mathbb{N}$? Justifier.
1) $0 \in A$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \implies \left(2n \in A \text{ et } 2n+1 \in A\right).$$
2) $0 \in A$ et $2 \in A$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2n \in A \implies \left(n \in A \text{ et } 2n+1 \in A\right).$$
3) $1 \in A$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \implies \left(n-1 \in A \text{ et } 2n \in A\right).$$

---

14 Montrer que pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$1 - nx \leqslant (1-x)^n \leqslant \frac{1}{1+nx}.$$

15 ⌚⌚⌚ Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists p, q \in \mathbb{N}, \quad n = 2^p(2q+1).$$

16 ⌚⌚⌚ Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, il existe des entiers $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N}^*$ pour lesquels $a_1 < \ldots < a_n$ et :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 1.$$

17 ⌚⌚⌚ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante f de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même possède un point fixe : $\exists k \in [\![1, n]\!], \quad f(k) = k$.

RAISONNEMENTS DIVERS

18 ⌚⌚ Règle du jeu : faites comme si vous n'aviez jamais entendu parler de la factorisation première d'un entier. On admet en revanche que $\frac{1}{2}$ n'est pas un entier.
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on dit que n est *pair* (resp. *impair*) si $n = 2k$ (resp. $n = 2k+1$) pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

1) Montrer qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.
2) Montrer que tout entier naturel est pair ou impair, puis qu'il en va de même des entiers relatifs.
3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, n est pair si et seulement si n^2 est pair.

19 ⌚⌚ On admet que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

1) Que dire de la somme et du produit de deux rationnels (resp. de deux irrationnels, resp. d'un rationnel et d'un irrationnel) ?
2) Montrer que lorsqu'un réel peut être écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, les entiers a et b sont nécessairement uniques.
3) Montrer que $\frac{\ln p}{\ln q}$ est irrationnel pour tous nombres premiers p et q distincts.
4) On pose $x^y = e^{y \ln x}$ pour tous $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$.
   a) Montrer que pour tous $x, x' > 0$ et $y, y' \in \mathbb{R}$:
   $$x^{y+y'} = x^y x^{y'}, \quad x^{yy'} = \left(x^y\right)^{y'} \quad \text{et} \quad (xx')^y = x^y x'^y.$$
   b) Montrer l'existence de deux irrationnels x et y pour lesquels x^y est rationnel. On pourra exploiter le résultat de la question **3)** ou bien s'intéresser au réel $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$.

20 ⌚⌚ Montrer qu'il existe un triplet de réels (a, b, c) pour lequel pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$:
$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1}.$$

21 ⌚⌚ Montrer par analyse-synthèse que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

22 ⌚⌚ On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions affines et $\mathscr{B}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer par analyse-synthèse que toute fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une et une seule manière, d'une fonction de $\mathscr{A}$ et d'une fonction de $\mathscr{B}$.

23 ⌚⌚ On cherche toutes les *isométries de* $\mathbb{R}$, i.e. toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\left|f(x) - f(y)\right| = |x - y|$.

1) **Analyse :** Soit f une isométrie. On note δ la fonction $x \longmapsto f(x) - f(0)$ sur $\mathbb{R}$.
   a) Montrer, en étudiant la quantité $\big(f(x) - f(y)\big)^2$, que $\delta(x)\delta(y) = xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
   b) En déduire la forme de f.
2) **Synthèse :** Conclure.

24 ⌚⌚⌚

1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables pour lesquelles pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
   $$f(x+y) = f(x) + f(y).$$
2) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ pour lesquelles pour tous $m, n \in \mathbb{N}$:
   $$f(m+n) = f(m)f(n).$$
3) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$:
   $$f(m+n) + f(m-n) = 2f(m) + 2f(n).$$