1 APPRENTISSAGE DE LA SYNTAXE

1 ◷ Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 2 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 3.$

2) $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}^*\right)^2, \quad x < y \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}.$

3) $\exists\, x \in \mathbb{R}_+ / \quad x < \sqrt{x}.$

4) $\forall x, x' \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ x \neq x' \Longrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{x'+1}{x'-1}.$

5) $\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\, n \in \mathbb{N}^* / \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \geqslant N.$

---

2 ◷ Traduire dans un français **ÉCLAIRANT** les propositions suivantes — i.e. dans un français qui met en évidence le **SENS** de chaque proposition — puis déterminer sans justifier leur valeur de vérité.

1) $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & \exists\, N \in \mathbb{N} / & n \leqslant N. \\ \exists\, N \in \mathbb{N} / & \forall n \in \mathbb{N}, & n \leqslant N. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \forall y \in \mathbb{R}_+^*, & \exists\, x \in \mathbb{R} / & y = e^x. \\ \exists\, x \in \mathbb{R} / & \forall y \in \mathbb{R}_+^*, & y = e^x. \end{cases}$

3) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, & \exists\, y \in \mathbb{R} / & y = f(x). \\ \exists\, y \in \mathbb{R} / & \forall x \in \mathbb{R}, & y = f(x). \end{cases}$

---

3 ◷ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Écrire avec des quantificateurs les propositions suivantes :

1) f est croissante.
2) f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut.
3) f possède un minimum.
4) f s'annule au plus une fois.

---

4 ◷ Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Pour chacune des propositions suivantes, donner graphiquement à main levée un exemple de fonction f **NE** la vérifiant **PAS**.

1) $\exists\, M \in \mathbb{R} / \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leqslant M.$
2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant 0.$
3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 1 \quad \text{ou} \quad f(x) \leqslant -1.$

---

5 ◷ Écrire en langage mathématique les ensembles suivants :

1) l'ensemble des entiers naturels divisibles par 7.
2) l'ensemble des fractions d'entiers dont le dénominateur est une puissance de 3.
3) l'ensemble des entiers qui sont la somme de deux carrés d'entiers.
4) l'ensemble des nombres complexes dont les parties réelle et imaginaire sont des entiers relatifs.

---

2 ÉGALITÉ ET INCLUSION D'ENSEMBLES

6 ◷◷ Montrer que :

1) $\left\{x \in \mathbb{R} / \quad x^4 = 4x - 2\right\} \subset \mathbb{R}_+.$

2) $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \exists\, t \in \mathbb{R} / \ x = 2t \ \text{ et } \ y = t^2 + 1\right\} \subset \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x \leqslant y\right\}.$

3) $\left\{z \in \mathbb{C} / \quad |z-1| = |z+1|\right\} = \left\{z \in \mathbb{C} / \quad \mathrm{Re}(z) = 0\right\}.$

---

7 ◷◷ On pose :

$$\mathscr{A} = \left\{\frac{\varepsilon}{k(k+1)}\right\}_{k \in \mathbb{N}^*, \varepsilon \in \{-1,1\}} \quad \text{et} \quad \mathscr{B} = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right\}_{m,n \in \mathbb{N}^*}.$$

Étudier les inclusions : $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$ et : $\mathscr{B} \subset \mathscr{A}$.

---

8 ◷ Soient A et B deux ensembles.

1) Est-il vrai que : $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$?
2) Est-il vrai que : $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$?

---

9 ◷◷ Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que :

1) $\left(\overline{A \cap B}\right) \setminus C = \left(\overline{C} \setminus B\right) \cup \left(\overline{A} \setminus C\right).$
2) $A \setminus (B \cap C) = \left(A \setminus B\right) \cup \left(A \setminus C\right).$
3) $A \cup B = B \cap C \quad \Longleftrightarrow \quad A \subset B \subset C.$
4) $\left(E = A \cup B \quad \text{et} \quad A \cap C \subset B \quad \text{et} \quad B \cap C \subset A\right) \Longrightarrow \quad C \subset A \cap B.$
5) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$

---

3 RAISONNEMENT PAR RÉCURRENCE

10 ◷ On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leqslant 4$.
2) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite à préciser.

---

11 ◷ On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^n - 2^n$.

---

12 ◷ On note $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = n(n-1)$.

---

13 ◷◷ On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.

---

14 Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2.$$

15

1) Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et :
   - a) pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 1 - u_n$.
   - b) pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = 2(n+1)u_n$.
   - c) pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + 2n$.
   - d) pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + n^2 - 1$.
   - e) $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2}{u_n}$.
2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \begin{cases} u_{\frac{n}{2}}^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ z \times u_{\frac{n-1}{2}}^2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$
3) Déterminer une expression explicite de la famille $(z_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ définie pour tous $i, j \in \mathbb{N}$ par : $z_{0,j} = 1$ et : a) $z_{i+1,j} = 2^i j + z_{i,j}$. b) $z_{i+1,j} = (i+j)\, z_{i,j+1}$.

---

16 Montrer que tout entier supérieur ou égal à 2 est un produit de nombres premiers — par convention, un nombre premier est le produit d'un seul nombre premier, à savoir lui-même.

---

17 Montrer que tout entier supérieur ou égal à 8 peut être écrit $3a + 5b$ pour certains $a, b \in \mathbb{N}$.

---

18 Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists\, p, q \in \mathbb{N}/ \quad n = 2^p(2q+1).$$

---

19 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante f de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ possède un point fixe : $\exists\, k \in [\![1,n]\!]/ \quad f(k) = k$.

---

4 Raisonnements divers

20 Montrer que lorsqu'un réel peut être écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, les entiers a et b sont nécessairement uniques.

---

21 En s'aidant du nombre $\sqrt{2}$, montrer que :

$$\exists\, x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}/ \quad x^y \in \mathbb{Q}.$$

---

22 Montrer par analyse-synthèse que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est la somme, d'une unique façon, d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

---

23 On cherche toutes les *isométries de* $\mathbb{R}$, i.e. toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\big|f(x) - f(y)\big| = |x - y|$.

1) **Analyse :** Soit f une isométrie. On note δ la fonction $x \longmapsto f(x) - f(0)$ sur $\mathbb{R}$.
   - a) Montrer, en étudiant la quantité $\big(f(x) - f(y)\big)^2$, que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $\delta(x)\delta(y) = xy$.
   - b) En déduire la forme de f.
2) **Synthèse :** Conclure.

24

1) Déterminer par analyse-synthèse toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}$:

$$f(m+n) = f(m)f(n).$$

2) Déterminer par analyse-synthèse toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) + f(y)$.
