# SÉRIES DÉFINIES EXPLICITEMENT

**1** Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. 2) $\sum \frac{n}{2^n+n}$. 3) $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

4) $\sum \frac{1}{\left(n^2+1\right)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}$. 5) $\sum \frac{n!^3}{(3n)!}$.

6) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. 7) $\sum \frac{n^2\ln n}{a^n}$ $(a>0)$.

8) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. 9) $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ $(a\in\mathbb{R})$.

10) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$. 11) $\sum \frac{1}{\ln\left(n^2+1\right)}$.

12) $\sum \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)$. 13) $\sum \frac{1}{n!}\prod_{k=2}^{n}\ln k$.

14) $\sum \frac{n!^2}{2^{n^2}}$. 15) $\sum \cos^n\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>0)$.

16) $\sum \left(e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$. 17) $\sum \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x}\,dx$.

18) $\sum \frac{1}{n^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}$. 19) $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2\sqrt{n}}} e^x\tan x\,dx$.

20) $\sum \left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$. 21) $\sum \frac{a^{\ln n}}{\sqrt[n]{n}}$ $(a>0)$.

22) $\sum \frac{n!^\alpha}{(2n)!}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$. 23) $\sum \frac{1}{n\ln(n!)}$.

24) $\sum \frac{1}{n\cos^2 n}$. 25) $\sum \frac{(\ln n)^n}{n!}$.

---

**2**

1) Montrer que $\operatorname{Arccos} x \underset{x\to 1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$ grâce au changement de variable $x=\cos\theta$.

2) En déduire la nature de $\sum \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(n^2\right)\right)$.

---

**3** Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$. 2) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

3) $\sum (-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>0)$.

4) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$. 5) $\sum (-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

6) $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}+\sin(n)}$. 7) $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

8) $\sum \frac{(-1)^n(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$.

9) $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$ $(\alpha\in\mathbb{R}^*)$.

---

**4** Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes.

1) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. 2) $\sum \frac{n}{7^n}$.

3) $\sum \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

4) $\sum \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

5) En exploitant la constante d'Euler $\gamma$ :

a) $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. b) $\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

6) $\sum \ln\cos\frac{1}{2^n}$.

---

**5** Soient $a, b\in\mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur $a$ et $b$ la série :

$$\sum \Big(\ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\Big)$$

est-elle convergente ? Calculer sa somme le cas échéant.

---

**6**

1) Montrer que la série $\sum (-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge.

2) Exprimer $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ à l'aide de factorielles pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

3) En déduire, grâce à la formule de Wallis, une expression explicite de $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

---

**7** Montrer que pour un certain $\ell\in\mathbb{R}$ :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{=} 2\sqrt{n}+\ell+o(1)$$

en calculant un développement asymptotique lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

---

**8**

1) Justifier l'existence de $\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive simple telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u_k$.

3) En déduire que la suite $\left(\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

---

**9** Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On s'intéresse à la nature de la série $\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, qu'on appelle une *série de Bertrand*.

1) On suppose $\alpha>1$. Trouver un réel $\gamma>1$ pour lequel $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Conclusion ?

2) On suppose $\alpha<1$. Trouver un réel $\gamma<1$ pour lequel $\frac{1}{n^\gamma} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\right)$. Conclusion ?

3) Déterminer la nature de la série $\sum\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ pour tout $\beta\in\mathbb{R}$ grâce à une comparaison série-intégrale.

4) Énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence des séries de Bertrand.

---

**10** Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose $u_n=\frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

1) Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dans le cas où $\alpha \leqslant 0$ ou $\alpha > 1$.
2) On suppose à présent que $0 < \alpha \leqslant 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_{2n-1} + u_{2n}$.
   a) Montrer que la série $\sum v_n$ converge.
   b) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

---

**11** 🕑🕑🕑
1) Montrer que l'ensemble $\left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sin^2 x \leqslant \frac{1}{2} \right\}$ ne contient jamais trois entiers consécutifs.
2) En déduire que la série $\sum \frac{\sin^2 n}{n}$ diverge.

---

## SÉRIES ABSTRAITES

**12** 🕑🕑 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n^2$ converge-t-elle : 1) si la série $\sum u_n$ converge ?
2) si la série $\sum u_n$ converge absolument ?

---

**13** 🕑🕑 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
1) On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.
2) On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que la série $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

---

**14** 🕑🕑 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positives. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
1) a) Montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge.
   b) Et sans l'hypothèse de positivité ?
2) Étudier la nature des séries $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \frac{\sqrt{u_n}}{n}$.

---

**15**
1) 🕑🕑 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante.
   a) On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ en étudiant $\sum_{\frac{n}{2}<k\leqslant n} u_k$.
   b) La réciproque est-elle vraie ?
2) 🕑🕑🕑 Soit $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une fonction strictement croissante. On pose pour tout $x \geqslant 0$ :
$$\Phi(x) = \left| \left\{ n \in \mathbb{N}^* \;\middle|\; \varphi(n) \leqslant x \right\} \right|.$$
Montrer que si la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ converge, alors $\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}(x)$.

---

**16** 🕑🕑
1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive. On suppose que pour un certain $\alpha > 1$ :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
   a) Montrer que pour tout $\beta < \alpha$, la suite $\left(n^\beta u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
   b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge (*règle de Raabe-Duhamel*).
2) Étudier la nature de la série $\sum \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n} n}$ sans utiliser les formules de Wallis et Stirling.

---

**17** 🕑🕑
1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k.$$
   De quel résultat bien connu cette relation est-elle l'analogue ?
   b) En déduire que la série $\sum u_n v_n$ converge (*règle d'Abel*).
2) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\alpha > 0$. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge aussi.
3) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle et $\omega \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que la série $\sum \omega^n u_n$ converge. Quel résultat généralise-t-on ainsi ?
4) 🕑🕑🕑 Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.
   a) Étudier la nature des séries $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$.
   b) Montrer que $|\sin x| \geqslant \frac{1-\cos(2x)}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   c) Étudier la nature des séries :
$$\sum \frac{\left|\sin(n\theta)\right|}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\left|\cos(n\theta)\right|}{n^\alpha}.$$

---

**18** 🕑🕑🕑 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge et on pose $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
1) Exprimer $\sum_{k=1}^{n} k u_k$ en fonction de $U_1, \ldots, U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $\sum_{k=0}^{n} k u_k \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(n)$.
2) Montrer que la série $\sum \frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + n u_n}{n(n+1)}$ converge et calculer sa somme.

---

**19** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ strictement positive. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

**1)** 🕑 Montrer que si $\sum u_n$ converge, $\sum \frac{u_n}{S_n}$ converge aussi.

**2)** 🕑🕑 Montrer que si $\sum u_n$ diverge, $\sum \ln \frac{S_{n-1}}{S_n}$ diverge ausi, puis également $\sum \frac{u_n}{S_n}$.

**3)** 🕑🕑🕑 Montrer que $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ converge toujours

---

## FAMILLES SOMMABLES

> Dans les exercices qui suivent, l'existence des sommes infinies mérite bien sûr d'être justifiée.

**20** On pose $L_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :
$$L_k = X(X-1)\dots(X-k+1).$$

**1)** 🕑 Montrer que la famille $\left(\frac{P(n)}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$.

**2)** 🕑 Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_k(n)}{n!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**3)** 🕑🕑 En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!}$.

---

**21** 🕑🕑 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$ pour lequel $|z| < 1$. Calculer :

**1)** $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. **2)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}$.

**3)** $\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. **4)** $\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m+n)^\alpha}$.

**5)** $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$ en fonction de $\zeta(3)$.

**6)** 🕑🕑🕑 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$.

---

**22** 🕑🕑 À quelle condition nécessaire et suffisante sur $z, a, b \in \mathbb{C}$ les familles $(z_{p,q})_{p,q\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles sommables ? Le cas échéant, calculer leur somme.

**1)** $\frac{z^p}{q!}$. **2)** $\frac{a^p b^q}{p!q!}$. **3)** $\frac{q^p z^p}{p!q!}$. **4)** $\binom{p+q}{p} z^{p+q}$.

---

**23** 🕑🕑 Soit $z \in \mathbb{C}$ pour lequel $|z| < 1$. Montrer que :

**1)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{1-z^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^{2n}}$.

**2)** $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{1-z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{1+z^{2n+1}}$.

**3)** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)\, z^n$ où $d(n)$ désigne le nombre de diviseurs positifs de $n$.

---

**24** On ADMET que $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. Calculer :

**1)** 🕑 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

**2)** 🕑🕑 $\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{m^2n^2}$. **3)** 🕑🕑 $\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^*\\ m<n}} \frac{1}{m^2n^2}$.

**4)** 🕑🕑 $\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^*\\ m\mid n}} \frac{1}{m^2n^2}$. **5)** 🕑🕑🕑 $\sum_{m,n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}$.

**6)** 🕑🕑🕑 $\sum_{\substack{m,n\in\mathbb{N}^*\\ m\wedge n=1}} \frac{1}{m^2n^2}$.

---

**25**

**1)** 🕑🕑 Calculer :

**a)** $\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p \big(\zeta(p)-1\big)$. **b)** $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2p)}{2^{2p}}$.

**2)** 🕑🕑🕑 On ADMET que $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ pour tout $x \in \left]-1,1\right]$. Calculer en fonction de la constante d'Euler $\gamma$ :

**a)** $\sum_{p=2}^{+\infty} \frac{\zeta(p)-1}{p}$. **b)** $\sum_{p=2}^{+\infty} (-1)^p \frac{\zeta(p)}{p}$.

---

**26** 🕑🕑

**1)** Calculer $\sum_{\substack{p\in\mathbb{N}^*\\ q\in\mathbb{N}}} \frac{1}{(p^2+q)(p^2+q+1)}$.

**2)** En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{n(n+1)}$.

---

**27** 🕑🕑 Soit $z \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$.

**1)** Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**2)** En déduire que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z(z+1)\dots(z+n)} = \mathrm{e}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(z+n)}.$$

---

**28** 🕑🕑 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{m^\alpha+n^\alpha}\right)_{m,n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si et seulement si $\alpha > 2$. On pourra observer que pour tous $x, y \geqslant 0$ : $(x+y)^2 \geqslant x^2+y^2$ et $\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$.

---

**29** 🕑🕑🕑 Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a, b > 0$. Les familles suivantes sont-elles sommables ?

**1)** $\left(\frac{1}{n^{\alpha p}}\right)_{n,p\geqslant 2}$. **2)** $\left(\frac{1}{n^2-p^2}\right)_{n,p\in\mathbb{N}^*,\, n\neq p}$.

**3)** $\frac{z^{pq}}{p!q!}$. **4)** $\left(\frac{1}{np(n+p)}\right)_{n,p\in\mathbb{N}^*}$.

**5)** $\left(\frac{1}{a^p+b^q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$. **6)** $\left(\frac{1}{r^2}\right)_{r\in\mathbb{Q}\cap]1,+\infty[}$.

---

**30** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que $a_0=0$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.

**1)** ◷ Montrer que la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in ]-1,1[$. On note $A(x)$ sa somme.

**2)** ◷◷ On pose $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum b_n x^n$ converge absolument pour tout $x\in]-1,1[$ et que sa somme vaut $\dfrac{A(x)}{1-x}$.

**3)** ◷◷◷ On pose $c_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :
$$c_n = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} c_k a_{n-k}.$$

**a)** Montrer que $c_n \in [0,1]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**b)** En déduire la série $\sum c_n x^n$ converge absolument pour tout $x\in]-1,1[$ et calculer sa somme en fonction de $A(x)$.

---

**31** ◷◷◷

**1)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positive décroissante. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ ont même nature (*critère de condensation*).

**2)** Redémontrer le théorème de convergence des séries de Riemann.

**3)** Montrer que pour tous $\beta\in\mathbb{R}$, la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta>1$.

---

**32** ◷◷◷

**1)** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \ell^1(\mathbb{N}^*,\mathbb{C})$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $\quad (a\star b)_n = \sum_{\substack{d\in\mathbb{N}^*\\ d\,|\,n}} a_d\, b_{\frac{n}{d}}$. Montrer que $a\star b \in \ell^1(\mathbb{N}^*,\mathbb{C})$, puis exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} (a\star b)_n$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

**2)** Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de $n$ et $\sigma(n)$ leur somme.

**a)** Montrer que pour tout $\alpha>1$ :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)^2.$$

**b)** Montrer que pour tout $\alpha>2$ :
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha} = \zeta(\alpha)\zeta(\alpha-1).$$

---

**33** ◷◷◷ Soit $\alpha>1$.

**1)** Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :
$$\zeta(\alpha)\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant n}}\left(1-\frac{1}{p^\alpha}\right) = \sum_{k\in E_n}\frac{1}{k^\alpha}$$
où $E_n$ est l'ensemble des entiers naturels qui ne sont divisibles par aucun nombre premier inférieur ou égal à $n$.

**2)** En déduire le *développement en produit eulérien* de la fonction $\zeta$ : $\quad \zeta(\alpha) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\leqslant n}}\left(1-\dfrac{1}{p^\alpha}\right)^{-1}$.

---

**34** ◷◷◷

**1)** Soient $(x_i)_{i\in I}\in\ell^1(I,\mathbb{R}_+)$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de parties de $I$ pour laquelle $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \varnothing$.

**a)** Montrer que pour toute partie finie $F$ de $I$, il existe un entier $N\in\mathbb{N}$ pour lequel $F\cap I_N=\varnothing$.

**b)** En déduire que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_n} x_i = 0$.

**2)** Soient $(z_i)_{i\in I}\in\ell^1(I,\mathbb{C})$ et $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de $I$ pour laquelle $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\sum_{i\in I_n} z_i = \sum_{i\in I} z_i$.

---

**35** ◷◷◷ On dit qu'un ensemble $E$ est *au plus dénombrable* s'il existe une injection de $E$ dans $\mathbb{N}$. On **ADMET** que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^2$ sont équipotents.

**1)** Soient $I$ un ensemble au plus dénombrable et $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles au plus dénombrables. Montrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est au plus dénombrable.

**2)** Soit $(z_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Montrer que l'ensemble $\left\{i\in I \mid \ z_i\neq 0\right\}$ est au plus dénombrable.

---