1 Séries définies explicitement

1 Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. 2) $\sum \frac{n}{2^n+n}$. 3) $\sum e^{-\sqrt{n}}$.

4) $\sum \frac{1}{(n^2+1)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}$. 5) $\sum \frac{n^2\ln n}{4^n}$.

6) $\sum \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. 7) $\sum \frac{n!^3}{(3n)!}$.

8) $\sum \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. 9) $\sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}$ $(a\in\mathbb{R})$.

10) $\sum \frac{1}{(\ln n)^n}$. 11) $\sum \frac{1}{\ln(n^2+1)}$.

12) $\sum \sin\left(\pi\sqrt{4n^2+1}\right)$. 13) $\sum \frac{1}{n!}\prod_{k=2}^{n}\ln k$.

14) $\sum \frac{(\ln n)^n}{n!}$. 14) $\sum \cos^n\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>0)$.

16) $\sum \left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^{\sqrt{n}}$. 16) $\sum \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x}\,dx$.

18) $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2n}} e^x\tan x\,dx$. 18) $\sum \frac{n!^2}{2^{n^2}}$.

2

1) Montrer que : $\operatorname{Arccos} x \underset{x\to1}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

2) En déduire la nature de $\sum \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{\pi}\operatorname{Arctan}(n^2)\right)$.

---

3 Étudier la nature des séries suivantes :

1) $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$. 2) $\sum (-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n}$.

3) $\sum \frac{(-1)^n(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$. 4) $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

5) $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}+\sin(n)}$. 6) $\sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

7) $\frac{(-1)^n}{n^\alpha+(-1)^n}$ $(\alpha\in\mathbb{R}^*)$.

---

4 Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leurs sommes.

1) $\sum \frac{1}{n(n+1)}$. 2) $\sum \frac{n}{7^n}$.

3) $\sum \frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$.

4) $\sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.

---

5 Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $a_n = \ln\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$.
Montrer, sans utiliser la formule de Stirling, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

6

1) Justifier l'existence de : $\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive simple telle que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k u_k.$$

3) En déduire que la suite $\left(\int_0^{n\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

7

1) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$. Montrer que la série $\sum\frac{P(n)}{n!}$ converge. On notera $S(P)$ sa somme.

2) On rappelle que : $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} = e$. On pose : $L_0=1$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$L_k = X(X-1)\ldots(X-p+1).$$

Calculer $S(L_k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$.

3) Calculer : $S(X^3)$.

---

8 Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. On s'intéresse à la nature de la série $\sum\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$, qu'on appelle une *série de Bertrand*.

1) On suppose : $\alpha>1$. Trouver un réel $\gamma>1$ pour lequel : $\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Conclusion ?

2) On suppose : $\alpha<1$. Trouver un réel $\gamma<1$ pour lequel : $\frac{1}{n^\gamma} \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}\right)$. Conclusion ?

3) Déterminer la nature de la série $\sum\frac{1}{n(\ln n)^\beta}$ pour tout $\beta\in\mathbb{R}$ grâce à une comparaison série-intégrale.

4) Énoncer une condition nécessaire et suffisante de convergence des séries de Bertrand.

---

9 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n^\alpha}.$$

1) Étudier la convergence de la série $\sum u_n$ dans le cas où : $\alpha\leqslant 0$ ou $\alpha>1$.

2) On suppose à présent que : $0<\alpha\leqslant 1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = u_{2n-1}+u_{2n}$.

a) Montrer que la série $\sum v_n$ converge.

a) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

---

2 SÉRIES ABSTRAITES

10 ◷◷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n^2$ converge-t-elle :
1) si la série $\sum u_n$ converge ?
2) si la série $\sum u_n$ converge absolument ?

---

11 ◷◷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
1) On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ ont même nature.
2) On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$ convergent. Montrer que la série $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

---

12 ◷◷ Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positives. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
1) a) Montrer que la série $\sum u_n v_n$ converge.
   b) Et sans l'hypothèse de positivité ?
2) Étudier la nature des séries $\sum \sqrt{u_n v_n}$ et $\sum \dfrac{\sqrt{u_n}}{n}$.

---

13 ◷◷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ décroissante.
1) On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer qu'alors : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
2) La réciproque est-elle vraie ?

---

14 ◷◷
1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ strictement positive. On suppose que pour un certain $\alpha > 1$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
   a) Montrer que pour tout $\beta < \alpha$, la suite $\left(n^\beta u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang.
   b) En déduire que la série $\sum u_n$ converge — c'est la *règle de Raabe-Duhamel*.
2) Étudier la nature de la série $\sum \binom{2n}{n} \dfrac{1}{2^{2n} n}$ sans utiliser les formules de Wallis et Stirling.

---

15 ◷◷◷
1) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} u_k v_k = u_n V_n - \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) V_k.$$
   De quel résultat bien connu cette relation est-elle l'analogue ?
   b) En déduire que la série $\sum u_n v_n$ converge — c'est la *règle d'Abel*.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la série $\sum \dfrac{u_n}{n^\alpha}$ converge aussi.
3) Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.
   a) Étudier la nature des séries $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$, $\sum \dfrac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum \dfrac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$.
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$|\sin x| \geqslant \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$
   c) Étudier la nature des séries $\sum \dfrac{\left|\sin(n\theta)\right|}{n^\alpha}$ et $\sum \dfrac{\left|\cos(n\theta)\right|}{n^\alpha}$.

---

16 ◷◷◷
1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positive décroissante. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ ont même nature. Ce résultat est parfois appelé le *critère de condensation*.
2) Redémontrer le théorème de convergence des séries de Riemann.
3) Montrer que pour tous $\beta \in \mathbb{R}$, la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si : $\beta > 1$.

---

17 ◷◷◷ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ positive de limite nulle. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et on suppose la suite $\left(U_n - n u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée par un certain M en valeur absolue.
1) Montrer que pour tout $n \geqslant 2$:
$$\left|\frac{U_{n-1}}{n-1} - \frac{U_n}{n}\right| \leqslant M\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$
2) En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
