

**1** ☉ Soient  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ ,  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  et  $(z_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  deux familles de nombres complexes,  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $p \in \mathbb{N}$ .

1) Sans justification, les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?

- a)  $\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$ .  
 b)  $\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n a_k \times \sum_{k=1}^n b_k$ .  
 c)  $\sum_{k=1}^n \lambda a_k = \lambda \sum_{k=1}^n a_k$ . d)  $\left( \sum_{k=1}^n a_k \right)^p = \sum_{k=1}^n a_k^p$ .

2) Reprendre la question 1) en remplaçant tous les  $\sum$  par des  $\prod$ .

3) Transformer  $\sum_{k=1}^n \ln a_k$  sous l'hypothèse que pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $a_k > 0$ .

4) Est-il vrai que :  $\prod_{i=1}^m \sum_{j=1}^n z_{ij} = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^m z_{ij}$  ?

## 1 SOMMES

**2** ☉☉ Simplifier les sommes suivantes :

- 1)  $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{3^{2i-1}}$ . 2)  $\sum_{i=0}^n i(i-1)$ . 3)  $\sum_{j=1}^n (2j-1)$ .  
 4)  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (i+j)$ . 5)  $\sum_{0 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$ . 6)  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j+1}$ .  
 7)  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (j-i)$ . 8)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i+j)^2$ . 9)  $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i^2}{j}$ .  
 10)  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max\{i, j\}$ . 11)  $\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ .

**3** ☉ Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

- 1)  $\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ .  
 2)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$ .

**4** ☉

- 1) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , simplifier de deux façons différentes la somme  $\sum_{k=0}^n ((k+1)^2 - k^2)$  et retrouver ainsi l'expression de  $\sum_{k=0}^n k$  vue en cours.  
 2) Adapter au calcul de  $\sum_{k=0}^n k^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**5** Soit  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) ☉ Simplifier  $\sum_{k=0}^n 2^k k$  en suivant pas à pas les indications suivantes :

— compléter d'abord l'égalité :  $\sum_{k=0}^n x^k = \dots$

— dériver des deux côtés,  
 — évaluer en 2 et conclure.

Cette technique de calcul est importante, nous en aurons souvent besoin au deuxième semestre. À retenir dès maintenant !

- 2) ☉☉ Retrouver le résultat de la question 1) en calculant de deux façons différentes la somme  $\sum_{0 \leq i < j \leq n} 2^j$ .  
 3) ☉☉ Adapter la technique de la question 1) au calcul de la somme  $\sum_{k=0}^n k^2 3^k$ .

**6** ☉☉ Étudier la monotonie des suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définies pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par :

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

**7** ☉☉ Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}.$$

**8** ☉☉ Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}.$$

**9** 1) a) ☉ Montrer que pour tout  $k \geq 2$  :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

b) ☉☉ En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

2) ☉☉☉ Montrer par récurrence que pour tout

$$n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}.$$

## 2 PRODUITS

**10** ☉☉ Simplifier les produits suivants :

- 1)  $\prod_{k=1}^n (-5)^{k^2-k}$ . 2)  $\prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$ . 3)  $\prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j$ .  
 4)  $\prod_{k=1}^n (4k^2 - 1)$ . 5)  $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij$ . 6)  $\prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^p 2^{pk}$ .

11 ☉ Montrer SANS RÉCURRENCE que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$2^{n-1} \leq n! \leq n^{n-1}.$$


---

12 ☉ Soient  $z \in \mathbb{C}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On pose :  $P = \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k})$ .

Calculer  $(1-z)P$  et en déduire une expression simple de  $P$ .

---

13 Montrer par récurrence, puis sans récurrence, que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

1) ☉  $\prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$

2) ☉☉  $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^n k^k.$

---

14 1) a) ☉ Montrer que pour tout  $k \geq 2$  :

$$1 + \frac{1}{k^2} \leq \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}.$$

b) ☉☉ En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leq 4.$$

2) ☉☉☉ Montrer par récurrence que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$  :  $\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leq 3 - \frac{1}{n}.$

---

15 ☉☉ 1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \geq (n+1)^n.$$

2) En déduire par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)! \geq (n!)^n.$$


---

16 ☉☉ Montrer que pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$  :

$$\prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k.$$


---

17 ☉☉ 1) Factoriser  $k^3 - 1$  par  $k - 1$  et  $k^3 + 1$  par  $k + 1$  pour tout  $k \geq 2$ .

2) En déduire une simplification du produit  $\prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$  pour tout  $n \geq 2$ . On pourra s'efforcer de faire apparaître une simplification télescopique.

3) En déduire l'existence et la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$ ,

que l'on note aussi  $\prod_{k=2}^{+\infty} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$

---

### 3 COEFFICIENTS BINOMIAUX

18 ☉ Montrer que  $\binom{2n}{n}$  est pair pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

---

19 ☉☉ En considérant  $(1+1)^n$  et  $(1-1)^n$ , calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  les sommes  $\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$  et  $\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ , que

l'on note aussi respectivement  $\sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$  et  $\sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}.$

---

20 ☉☉ 1) Simplifier pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la somme  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k :$

a) grâce à la formule du capitaine.  
b) en dérivant de deux façons différentes la fonction  $x \mapsto (x+1)^n.$

2) En utilisant au choix l'une des stratégies de la question 1), simplifier pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la somme  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k^2.$

---

21 ☉☉ Montrer par récurrence sur  $n$  que pour tous  $p \in \mathbb{N}$  et  $n \geq p$  :  $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$

---

22 ☉☉ Simplifier pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la somme  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}.$

---

23 ☉☉ Simplifier pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  le quotient  $\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$ , puis le comparer à 1. Qu'en déduit-on ?

---

24 ☉☉ Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle. On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$  Montrer qu'alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $a_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k.$

---

25 ☉☉☉ Montrer que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$  et  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}.$$


---