**1** ◷ Soient $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, $(b_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(z_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\1\leqslant j\leqslant n}}$ deux familles de nombres complexes, $\lambda\in\mathbb{C}$ et $p\in\mathbb{N}$.

**1)** Sans justification, les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?

**a)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$.

**b)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_k\times\sum_{k=1}^{n}b_k$.

**c)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k$. **d)** $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p$.

**2)** Reprendre la question **1)** en remplaçant tous les $\sum$ par des $\prod$.

**3)** Transformer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln a_k$ sous l'hypothèse que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$ : $a_k>0$.

**4)** Est-il vrai que : $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}z_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}z_{ij}$ ?

---

# 1 Sommes

**2** ◷◷ Simplifier les sommes suivantes :

**1)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{3^{2i-1}}$. **2)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}i(i-1)$. **3)** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1)$.

**4)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$. **5)** $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}$. **6)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1}$.

**7)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(j-i)$. **8)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2$. **9)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i^2}{j}$.

**10)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max\{i,j\}$. **11)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

---

**3** ◷ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

**1)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

**2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^kk^2=(-1)^n\,\frac{n(n+1)}{2}$.

---

**4** ◷

**1)** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, simplifier de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left((k+1)^2-k^2\right)$ et retrouver ainsi l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k$ vue en cours.

**2)** Adapter au calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

---

**5** Soit $n\in\mathbb{N}$.

**1)** ◷ Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^kk$ en suivant pas à pas les indications suivantes :

— compléter d'abord l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k=\dots$

— dériver des deux côtés,

— évaluer en 2 et conclure.

Cette technique de calcul est importante, nous en aurons souvent besoin au deuxième semestre. À retenir dès maintenant !

**2)** ◷◷ Retrouver le résultat de la question **1)** en calculant de deux façons différentes la somme $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}2^j$.

**3)** ◷◷ Adapter la technique de la question **1)** au calcul de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^23^k$.

---

**6** ◷◷ Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\qquad\text{et}\qquad v_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

---

**7** ◷◷ Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$ :

$$\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}\geqslant\frac{n}{2}.$$

---

**8** ◷◷ Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

---

**9**

**1) a)** ◷ Montrer que pour tout $k\geqslant 2$ :

$$\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

**b)** ◷◷ En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant 2.$$

**2)** ◷◷◷ Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\geqslant\frac{3n}{2n+1}$.

---

# 2 Produits

**10** ◷◷ Simplifier les produits suivants :

**1)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(-5)^{k^2-k}$. **2)** $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}$. **3)** $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}i^j$.

**4)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(4k^2-1)$. **5)** $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}ij$. **6)** $\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}2^{p!k}$.

---

**11** ◷ Montrer **SANS RÉCURRENCE** que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^{n-1}.$$

---

**12** ◷ Soient $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose : $P = \prod_{k=0}^{n}\left(1+z^{2^k}\right)$. Calculer $(1-z)P$ et en déduire une expression simple de $P$.

---

**13** Montrer par récurrence, puis sans récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

1) ◷ $\prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$.
2) ◷◷ $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^{n} k^k$.

---

**14**

1) a) ◷ Montrer que pour tout $k \geqslant 2$ :

$$1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}.$$

b) ◷◷ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 4.$$

2) ◷◷◷ Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ : $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}$.

---

**15** ◷◷

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ :

$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \geqslant (n+1)^n.$$

2) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)! \geqslant (n!)^n.$$

---

**16** ◷◷ Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ :

$$\prod_{k=1}^{n}(1-x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

---

**17** ◷◷

1) Factoriser $k^3-1$ par $k-1$ et $k^3+1$ par $k+1$ pour tout $k \geqslant 2$.
2) En déduire une simplification du produit $\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$ pour tout $n \geqslant 2$. On pourra s'efforcer de faire apparaître une simplification télescopique.
3) En déduire l'existence et la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$, que l'on note aussi $\prod_{k=2}^{+\infty} \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

---

## 3 COEFFICIENTS BINOMIAUX

**18** ◷ Montrer que $\binom{2n}{n}$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

**19** ◷◷ En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes $\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$, que l'on note aussi respectivement $\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k}$ et $\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1}$.

---

**20** ◷◷

1) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$ :
   a) grâce à la formule du capitaine.
   b) en dérivant de deux façons différentes la fonction $x \longmapsto (x+1)^n$.
2) En utilisant au choix l'une des stratégies de la question **1)**, simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2$.

---

**21** ◷◷ Montrer par récurrence sur $n$ que pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant p$ : $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

---

**22** ◷◷ Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{n}{k}$.

---

**23** ◷◷ Simplifier pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$ le quotient $\dfrac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}$, puis le comparer à 1. Qu'en déduit-on ?

---

**24** ◷◷ Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$. Montrer qu'alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} b_k$.

---

**25** ◷◷◷ Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

---