1 ◷ Dans les questions qui suivent, les a_k, les z_{ij} et λ sont des nombres complexes quelconques.

1) Sans justification, les relations suivantes sont-elles vraies ou fausses en général ?

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k,\qquad \sum_{k=1}^{n}\lambda a_k=\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}a_k\sum_{k=1}^{n}b_k,\qquad \left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\sum_{k=1}^{n}|a_k|,$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^p=\sum_{k=1}^{n}a_k^p.$$

2) Reprendre la question **1)** en remplaçant les sommes par des produits.

3) Transformer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln a_k$ pour $a_1,\ldots,a_n>0$.

4) Est-il vrai que $\displaystyle\prod_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}z_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}z_{ij}$?

SOMMES

2 ◷◷ Simplifier les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}i(i-1)$. **2)** $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}(2j-1)$. **3)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k$.

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+n)$. **5)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}\frac{2^i}{3^{2i-1}}$. **6)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

7) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ en écrivant les termes sommés sous la forme $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}$ avec $a,b>0$.

8) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}i$. **9)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}j$. **10)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)$.

11) $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}$. **12)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j+1}$. **13)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(j-i)$.

14) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i^2}{j}$. **15)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(i+j)^2$. **16)** $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max\{i,j\}$.

---

3 ◷ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k^2=(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}$.

---

4 ◷◷

1) Montrer que $\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$ pour tout $k\geqslant 2$.

2) En déduire que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

---

5 ◷◷

1) Déterminer une expression explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

a) $u_{n+1}=u_n+n$. **b)** $u_{n+1}=u_n+n^2-1$.

2) Déterminer une expression explicite de la famille $(z_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ définie pour tous $i,j\in\mathbb{N}$ par $z_{0,j}=1$ et $z_{i+1,j}=2^ij+z_{i,j}$.

---

6 ◷◷

1) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^kk$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ en suivant pas à pas les indications suivantes :
- compléter d'abord l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^k=\ldots$
- dériver des deux côtés,
- évaluer en 2 et conclure.

2) Retrouver le résultat de la question **1)** en calculant de deux façons $\displaystyle\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n}2^j$.

3) Soit $x\in\,]-1,1[$.

a) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}kx^k=\frac{x}{(1-x)^2}$.

b) ◷◷◷ Calculer de même $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}k^2x^k$.

---

7 ◷◷ Étudier la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\qquad\text{et}\qquad v_n=\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

---

8 ◷◷ Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n}\frac{1}{k}\geqslant\frac{n}{2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

---

9 ◷◷◷ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}.$$

PRODUITS

10 ◷◷ Simplifier les produits suivants en les exprimant le plus possible à l'aide de puissances et de factorielles :

1) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\sqrt{k(k+1)}$. **2)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(-5)^{k^2-k}$. **3)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{4^k}{k^2}$.

4) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2k+1)$. **5)** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(4k^2-1\right)$. **6)** $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}x^{i+j}$.

7) $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(2i)$. **8)** $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}i^j$. **9)** $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}ij$. **10)** $\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}2^{p!k}$.

---

11 ◷ Montrer sans récurrence que $2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^{n-1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

---

12 Soit $z \in \mathbb{C}$. On pose $P_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + z^{2^k}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(1-z)P_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire une expression simple de P_n.

13

1) a) Montrer que $1 + \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{k^2}{(k-1)(k+1)}$ pour tout $k \geqslant 2$.

b) En déduire que $\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{1}{k^2}\right) \leqslant 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}.$$

---

14 Montrer sans récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!} = \prod_{k=1}^{n} k^k.$$

15

1) Montrer sans récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{(2n+1)!}{(n+1)!} \geqslant (n+1)^n.$$

2) En déduire que $\prod_{k=0}^{n-1} (2k+1)! \geqslant n!^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

16

1) Factoriser $k^3 - 1$ par $k - 1$ et $k^3 + 1$ par $k + 1$ pour tout $k \geqslant 2$.

2) En déduire sans récurrence que pour tout $n \geqslant 2$:
$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \frac{2}{3} \times \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)}.$$

3) En déduire l'existence et la valeur de $\prod_{k=2}^{+\infty} \dfrac{k^3 - 1}{k^3 + 1}$.

---

17 Montrer que $\prod_{k=1}^{n} (1 - x_k) \geqslant 1 - \sum_{k=1}^{n} x_k$ pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$.

COEFFICIENTS BINOMIAUX

18 On souhaite redémontrer par le calcul les formules du cours relatives aux coefficients binomiaux. On rappelle que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$: $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ si $k \in [\![0, n]\!]$ et $\dbinom{n}{k} = 0$ sinon.

1) Redémontrer la formule de symétrie.

2) Redémontrer la formule du capitaine.

3) Redémontrer la formule de Pascal.

4) Montrer que les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.

---

19 Montrer que $\dbinom{2n}{n}$ est pair pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

---

20 Étudier pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la monotonie de la famille $\left(\dbinom{n}{0}, \dbinom{n}{1}, \ldots, \dbinom{n}{n}\right)$.

---

21 En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes $\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ pair}}} \dbinom{n}{k}$ et $\sum_{\substack{0 \leqslant k \leqslant n \\ k \text{ impair}}} \dbinom{n}{k}$, qu'on note aussi respectivement $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \dbinom{n}{2k}$ et $\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \dbinom{n}{2k+1}$.

22

1) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} k$:

a) grâce à la formule du capitaine.

b) en dérivant de deux façons différentes la fonction $x \longmapsto (x+1)^n$.

2) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} k^2$.

---

23 Montrer que $\sum_{k=p}^{n} \dbinom{k}{p} = \dbinom{n+1}{p+1}$ pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant p$.

---

24 Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k+1} \dbinom{n}{k}$.

---

25 Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On pose pour tout $r \in \mathbb{N}$: $S_r = \sum_{k=0}^{n} k^r$.

1) Rappeler les valeurs de S_0, S_1 et S_2.

2) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$:
$$\sum_{i=0}^{r} \binom{r+1}{i} S_i = (n+1)^{r+1}.$$
On pourra s'intéresser à la quantité $(k+1)^{r+1} - k^{r+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et s'inspirer d'une preuve de cours.

3) En déduire que $S_3 = S_1^2$.

---

26 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On pose $b_n = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \dbinom{n}{k} b_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

---

27 Montrer que pour tous $a, b > 0$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$
