1 (SOUS-)ESPACES VECTORIELS ET COMBINAISONS LINÉAIRES

1 ◷

1) Dans $\mathbb{R}^3$, $(5,5,1)$ est-il combinaison linéaire de $(2,3,0)$ et $(3,2,0)$?
2) Dans $\mathbb{R}[X]$, $16X^3-7X^2+21X-4$ est-il combinaison linéaire de $8X^3-5X^2+1$ et X^2+7X-2 ?
3) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto \cos^2 x$ est-il combinaison linéaire de $x \longmapsto 1$ et $x \longmapsto \cos(2x)$?
4) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $x \longmapsto \sin(2x)$ est-elle combinaison linéaire de sinus et cosinus ?

---

2 ◷ Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, A^2 est combinaison linéaire de I_2 et A.

---

3 ◷ Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels ?

1) $\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}_+^2/\quad x=y\Big\}$.
2) $\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\quad 2x-5y-1=0\Big\}$.
3) $\Big\{(x,2x,3x)\Big\}_{x\in\mathbb{R}}$.
4) $\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\quad y=0\Big\}$.
5) $\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\quad x^3+x+y^2=0\Big\}$.
6) $\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\quad x=y \quad\text{et}\quad 3y-2z=0\Big\}$.
7) $\Big\{P\in\mathbb{R}[X]/\quad \deg(P)\geqslant 2\Big\}$.
8) $\Big\{P\in\mathbb{R}[X]/\quad P\big(X^2\big)=P'+X^4P\Big\}$.
9) $\Big\{f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\quad f(0)+f(1)=f'(0)\Big\}$.

---

4 ◷

1) Montrer que l'ensemble des fonctions 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2) L'ensemble des fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? Et l'ensemble des fonctions monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Et l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?
3) L'ensemble des fonctions majorées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? Et l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

---

5 ◷◷ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F\cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : $F\subset G$ ou $G\subset F$.
2) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une suite *filtrante* de sous-espaces vectoriels de E, i.e. telle que :
$$\forall i,j\in I,\quad \exists\, k\in I/\quad F_i\cup F_j\subset F_k.$$
Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i\in I}F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

---

6 ◷ Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces affines :

1) $\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/\quad x-y+z=2 \quad\text{et}\quad 2x+y+2z=1\Big\}$.
2) $\Big\{M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})/\quad \mathrm{tr}(M)=1\Big\}$.
3) $\Big\{P\in\mathbb{R}[X]/\quad X^2P''-3XP'+4P=4-X\Big\}$.
4) $\Big\{f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})/\quad f(0)=2 \quad\text{et}\quad f(1)=-3\Big\}$.
5) $\Big\{y\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})/\quad \forall x\in\mathbb{R},\ e^{x^2}y'(x)+y(x)=1\Big\}$.

---

7 ◷ Montrer par des opérations sur les Vect l'égalité :
$$\mathbb{R}_2[X]=\mathrm{Vect}\Big((X-1)^2,(X-1)(X+1),(X+1)^2\Big).$$

---

8 ◷ Soit $a\in\mathbb{R}$. On pose : $u=(1,-1,1)$ et $v=(0,1,a)$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur a le vecteur $(1,1,2)$ appartient-il à $\mathrm{Vect}(u,v)$?

---

9 ◷◷ Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\mathrm{Vect}\Big(x\longmapsto\cos(kx)\Big)_{0\leqslant k\leqslant n}=\mathrm{Vect}\Big(x\longmapsto\cos^k x\Big)_{0\leqslant k\leqslant n}.$$

---

2 FAMILLES LIBRES ET BASES

10 ◷ Montrer que les fonctions $x\longmapsto\sin x$, $x\longmapsto\cos x$, $x\longmapsto x\sin x$ et $x\longmapsto x\cos x$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

---

11 ◷ On note f la fonction $x\longmapsto e^x$, g la fonction $x\longmapsto e^{2x}$ et h la fonction $x\longmapsto e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Montrer de deux manières différentes que la famille (f,g,h) est libre :

1) par une technique d'évaluation.
2) par une étude asymptotique en $+\infty$.

---

12 ◷◷ Montrer de deux manières différentes que les suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(n^2\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

---

13 ◷◷ Montrer que les suites $\big(n^k\big)_{n\in\mathbb{N}}$, k décrivant $\mathbb{N}$, sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

---

14 ◷◷ On pose : $P_0=1$ et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:
$$P_k=X(X-1)(X-2)\ldots(X-k+1).$$
Montrer de deux manières différentes que la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

15 ◷◷ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u_1, \ldots, u_n \in E$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose : $v_k = u_1 + \ldots + u_k$.

1) Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre si et seulement si la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ l'est.
2) Montrer que $(u_1, \ldots, u_n)$ engendre E si et seulement si $(v_1, \ldots, v_n)$ engendre E.

---

16 ◷◷ Montrer que la famille $\left(x \longmapsto |x-\lambda|\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre.

---

17 ◷◷ Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de colonnes $C_1, \ldots, C_n$. On suppose que A est *à diagonale strictement dominante*, i.e. que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$: $\displaystyle\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{ij}| < |a_{ii}|$. Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ tels que : $x_1C_1+\ldots+x_nC_n = 0$. Montrer que : $x_1 = \ldots = x_n = 0$ en exploitant le réel $\max\left\{|x_1|, \ldots, |x_n|\right\}$. Qu'en déduit-on sur A ?

---

18 ◷◷◷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que la famille $\left((X+k)^n\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $\mathbb{R}[X]$ est libre. Soit $(\lambda_k)_{0\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que : $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k(X+k)^n = 0$.

1) Montrer que pour tout $p \in [\![0,n]\!]$:
   a) $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k(X+k)^p = 0$.
   b) $\displaystyle\sum_{k=0}^n \lambda_k k^p = 0$.
2) Conclure en convoquant certains polynômes de Lagrange.

---

19 Montrer que la famille $\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda x}\right)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre :

1) ◷◷ en s'intéressant au comportement asymptotique des exponentielles.
2) ◷◷◷ en convoquant certains polynômes de Lagrange.

---

20 ◷◷◷ Montrer que la famille $\left(x \longmapsto \sin(\lambda x)\right)_{\lambda\in\mathbb{R}_+^*}$ de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est libre en convoquant certains polynômes de Lagrange.

---

21 ◷◷ On rappelle que $\mathbb{Q}$ est un corps et que $\mathbb{R}$, en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, peut être vu aussi comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

1) Montrer que la famille $(\ln p)_{p\in\mathbb{P}}$ est une famille libre du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
2) En déduire que $\ln p$ est rationnel pour au plus un nombre premier p. On peut montrer que $\ln r$ est irrationnel pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^* \setminus \{1\}$, mais c'est autrement plus compliqué.

---

3 BASES ET DIMENSION

22 ◷

1) Montrer que $\big((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées du vecteur $(8,4,2)$ dans cette base.
2) Montrer que $\big((X-1)^2, X^2, (X+1)^2\big)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et déterminer les coordonnées du polynôme X^2+X+1 dans cette base.
3) Montrer que la famille :
$$\big(X^3+X^2-X-1\ ,\ X^3-X^2+1\ ,\ X^3-X^2+X\ ,\ X^3+2X+1\big)$$
est une base de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer les coordonnées de X^2 dans cette base.

---

23 ◷◷ Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose :
$$u_k = \big(k, k-1, \ldots, 2, 1, 0, \ldots, 0\big) \in \mathbb{R}^n.$$
Montrer que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

---

24 ◷◷ Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que la famille :
$$\big(1+X, X+X^2, \ldots, X^{n-1}+X^n, X^n\big)$$
est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

---

25 ◷ Déterminer une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

1) $\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\quad x+2y+z=0\big\}$.
2) $\big\{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) /\quad AM=0\big\}$ avec : $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}$.
3) $\big\{P\in\mathbb{R}_3[X] /\quad P\big(X^2\big)=\big(X^3+1\big)P\big\}$.
4) $\big\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 /\quad x+y=0$ et $2x-z+t=0\big\}$.
5) $\big\{P\in\mathbb{R}_4[X] /\quad P(0)=P(1)=P(2)\big\}$.

---

26 ◷◷ On note A la matrice $\begin{pmatrix}3&-1\\7&1\end{pmatrix}$ et $\mathscr{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent à A. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et en déterminer une base.

---

27 ◷◷ On note E l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer sa dimension.

---

28 ◷◷ On note E l'ensemble des fonctions :
$$x \longmapsto A\sin(x+\varphi), \qquad A \text{ et } \varphi \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$
Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

---

29 Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Déterminer un entier $d \in \mathbb{N}$ pour lequel la famille $\left(I_n, M, M^2, \ldots, M^d\right)$ est liée.
2) En déduire que M possède un polynôme annulateur non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$.

---

30 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que les fonctions $x \longmapsto \sin(x+a)$, $x \longmapsto \sin(x+b)$ et $x \longmapsto \sin(x+c)$ sont linéairement dépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

---

31 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $x_1, \ldots, x_n \in E$ et $y_1, \ldots, y_n \in E$. On suppose que les vecteurs $x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n$ sont linéairement indépendants. Montrer l'inégalité : $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \geqslant n$.

32

1) Montrer que la famille :
$$\left(X^3 + X + 1, X^3 - 2X + 2, X^2 + 3X\right)$$
est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_4[X]$.
2) Montrer que la famille $\Big((8,4,1,2),(1,3,0,5)\Big)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}^4$.
3) Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base de E. On pose :
$$\varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + e_3 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_2 = e_2 - e_3.$$
Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre et la compléter en une base de E.

---

33 Déterminer la dimension de :
$$\mathrm{Vect}\Big((1,2,1,0),(4,-2,1,1),(7,2,4,2),(11,4,1,3)\Big).$$

---

4 MATRICE D'UNE FAMILLE DE VECTEURS DANS UNE BASE

34 Les familles suivantes sont-elles des bases ?

1) $\Big((2,0,\alpha),(2,\alpha,2),(\alpha,0,2)\Big) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.
2) $\Big((1,0,2,1),(0,1,1,2),(2,0,1,1),(2,1,0,1)\Big)$.

---

35 Soient $P_0, \ldots, P_n \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$: $\deg(P_i) = i$. Montrer par une technique matricielle que la famille $(P_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Comment montrer ce résultat sans matrices ?

---

36 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, \ldots, u_{2n+1})$ une famille libre de E. Montrer par une technique matricielle que la famille :
$$\left(u_1 + u_2, u_2 + u_3, \ldots, u_{2n} + u_{2n+1}, u_{2n+1} + u_1\right)$$
est également libre.

---

5 SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS

37 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que : $F \cup G = F + G$ si et seulement si : $F \subset G$ ou $G \subset F$.

---

38 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que : $\dim F + \dim G > \dim E$. Montrer que F et G ont au moins un vecteur non nul en commun.

---

39 On pose : $a = (0,0,1,0)$, $b = (1,1,0,-1)$, $u = (1,0,1,0)$, $v = (0,1,-1,0)$ et $w = (1,1,1,1)$, ainsi que : $F = \mathrm{Vect}(a,b)$ et $G = \mathrm{Vect}(u,v,w)$. Déterminer les dimensions de F, G, $F+G$ et $F \cap G$.

---

40 On pose :
$$F = \Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \quad x+y+z = 0 \quad \text{et} \quad y-z+t = 0\Big\}$$
et $G = \mathrm{Vect}\Big((1,0,0,1),(0,1,1,0)\Big)$. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^4$.

---

41 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. À quelle condition nécessaire et suffisante sur λ les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Vect}\Big((\lambda,\lambda,1)\Big)$ et $\mathrm{Vect}\Big((1,\lambda,1),(2,1,1)\Big)$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

---

42 On note F l'ensemble des fonctions constantes sur $[0,1]$ et on pose :
$$G = \left\{ f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big) / \quad \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}.$$
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

---

43 Montrer que $\Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] / \quad P\big(X^2\big) = X^2 P(X)\Big\}$ et $\Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] / \quad P(1) = P(2)\Big\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3[X]$.

---

44 On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathscr{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

---

45 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 et G trois sous-espaces vectoriels de E.

1) Si F_1 et F_2 sont en somme directe, montrer que $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont aussi.

2) Si F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E, $F_1 \cap G$ et $F_2 \cap G$ le sont-ils dans G ?

---

46 Déterminer un supplémentaire des sous-espaces vectoriels suivants — on admet que ce sont bien des sous-espaces vectoriels :

1) $\mathrm{Vect}\Big((1,2,1,1),(2,2,1,1),(0,2,1,1)\Big)$ dans $\mathbb{R}^4$.

2) $\Big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \quad x+y+2z-t=0 \quad \text{et} \quad y-z+t=0\Big\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

3) $\Big\{P \in \mathbb{R}_4[X] / \quad P(-X) = P(X)\Big\}$ dans $\mathbb{R}_4[X]$.

4) **a)** $\Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] / \quad P(0) = P'(0) = 0\Big\}$ dans $\mathbb{R}_3[X]$.

b) $\Big\{f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \quad f(0) = f'(0) = 0\Big\}$ dans $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

5) dans $\mathbb{R}_3[X]$:

$$\Big\{P \in \mathbb{R}_3[X] / \quad P'+3P = P(0)X^3+P(1)X+P(1)\Big\}.$$

---

47 Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts. On pose :

$$F = \Big\{f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) / \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad f(x_k) = 0\Big\}.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

2) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
