LOIS INTERNES

1 ◷◷ On pose pour tous $x, y \in [0,1] \times [0,1]$:
$$x \star y = x + y - xy.$$
1) Montrer que $\big([0,1], \star\big)$ est un magma commutatif et associatif avec élément neutre.
2) Quels sont les éléments inversibles de $\big([0,1], \star\big)$?

---

2 ◷◷ Soient E un ensemble et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre totale sur E. Cette relation étant totale, $\max\{x, y\}$ est bien défini pour tous $x, y \in E$.
1) Montrer que le magma $(E, \max)$ est associatif et commutatif.
2) À quelle condition nécessaire et suffisante $(E, \max)$ possède-t-il un élément neutre ?
3) Si $(E, \max)$ possède un élément neutre, quels sont ses éléments inversibles ?

GROUPES ET SOUS-GROUPES

3 ◷ On pose pour tous $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$:
$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y).$$
1) Montrer que $\big(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \star\big)$ est un groupe. Ce groupe est-il commutatif ?
2) Simplifier $(x, y)^n$ pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

---

4 ◷◷
1) Soient G un groupe, M un ensemble et φ une bijection de G sur M. On définit une loi interne $\star$ sur M en posant pour tous $x, y \in M$:
$$x \star y = \varphi\big(\varphi^{-1}(x)\,\varphi^{-1}(y)\big).$$
Montrer que $(M, \star)$ est un groupe.
2) a) Montrer que $\operatorname{th}(x + y) = \dfrac{\operatorname{th} x + \operatorname{th} y}{1 + \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.
b) On pose pour tous $x, y \in \,]-1, 1[$:
$$x \oplus y = \frac{x + y}{1 + xy}.$$
Montrer que $\oplus$ est une loi interne sur $]-1, 1[$ et que $\big(]-1, 1[, \oplus\big)$ est un groupe commutatif.

---

5 ◷ Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. Montrer que l'ensemble des $e^{\frac{2ik\pi}{p^n}}$, (k, n) décrivant $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

---

6 ◷ Montrer que $\big\{z \in \mathbb{C} \mid \quad \exists\, n \in \mathbb{N}^*, \quad z^n = 1\big\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{C}^*$.

---

7 On note A^+ l'ensemble des fonctions $z \longmapsto az + b$, (a, b) décrivant $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, et s l'application $z \longmapsto \overline{z}$.
1) ◷
a) Montrer que A^+ est un groupe pour la composition (dont le symbole $\circ$ sera omis par la suite).
b) Montrer que $A = A^+ \cup A^+ s$ est un sous-groupe de $S_{\mathbb{C}}$ où $A^+ s = \big\{fs \mid \quad f \in A^+\big\}$.
2) ◷◷ Soit $n \geqslant 2$. On note D_n l'ensemble des fonctions $f \in A$ pour lesquelles $f(\mathbb{U}_n) \subset \mathbb{U}_n$.
a) Pourquoi la fonction $f|_{\mathbb{U}_n}$ est-elle bijective de $\mathbb{U}_n$ sur $\mathbb{U}_n$ pour tout $f \in D_n$?
b) Montrer que D_n est un sous-groupe de A, appelé le *groupe diédral de degré n*.
c) Montrer que D_n contient s et $z \overset{r}{\longmapsto} e^{\frac{2i\pi}{n}} z$.
d) Que vaut la somme des éléments de $\mathbb{U}_n$? En déduire que tout élément de D_n fixe 0.
e) Montrer que :
$$D_n = \big\{r^k s^\varepsilon \mid \quad k \in [\![0, n-1]\!], \quad \varepsilon \in \{0, 1\}\big\}.$$

---

8 ◷◷ Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. À quelle condition nécessaire et suffisante simple sur a et b est-il vrai que $\mathbb{U}_a$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}_b$?

---

9 ◷◷ Soit G un groupe.
1) Soit $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de G indexée par un ensemble I. Montrer que $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G.
2) Soit $x \in G$. On appelle *centralisateur de x dans G*, noté $\mathrm{C}_G(x)$, l'ensemble des éléments de G qui commutent à x. Montrer que $\mathrm{C}_G(x)$ est un sous-groupe de G.
3) On appelle *centre de G* et on note $\mathrm{Z}(G)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent à **TOUT** élément de G. Montrer que $\mathrm{Z}(G)$ est un sous-groupe de G.

---

10 ◷◷
1) Trouver deux sous-groupes de $\mathbb{R}^*$ dont la réunion **N'est PAS** un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$.
2) Soient G un groupe et $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **CROISSANTE** de sous-groupes de G. Montrer que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} H_n$ est un sous-groupe de G.

---

11 ◷◷
1) Soient G un groupe commutatif fini et $g \in G$.
a) Montrer que l'application $x \longmapsto gx$ est bijective de G sur G.
b) Montrer, en calculant de deux manières le produit $\prod\limits_{x \in G} (gx)$, que $g^{|G|} = 1_G$. Ce résultat est un cas particulier du *théorème de Lagrange* proposé plus loin en exercice.
2) Déterminer tous les sous-groupes finis de $\mathbb{C}^*$.

---

12 ◷◷ Soient G un groupe fini et H un sous-groupe de G.

1) On définit sur G une relation binaire $\sim$ par :
$$x \sim y \iff \exists h \in H, \quad y = xh$$
pour tous $x, y \in G$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur G et déterminer la classe d'équivalence de x associée pour tout $x \in G$.
2) En déduire le *théorème de Lagrange* selon lequel $|H|$ divise $|G|$.
3) Si deux sous-groupes de G ont des cardinaux premiers entre eux, que peut-on dire de leur intersection ?

---

13 ◷◷◷ Soient G un groupe et X une partie de G. On note $\langle X\rangle$ l'intersection de tous les sous-groupes de G qui contiennent X.
1) Montrer que $\langle X\rangle$ est le plus petit sous-groupe de G contenant X. On l'appelle le *sous-groupe (de G) engendré par X*.
2) Montrer que $\langle X\rangle$ est l'ensemble de tous les produits $x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\ldots x_n^{\varepsilon_n}$, $x_1, \ldots, x_n$ décrivant X et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ valant ± 1 — avec la convention qu'un produit vide vaut 1_G pour $n = 0$.
3) On suppose G fini et que $X = \{x\}$ pour un certain $x \in G$. On note $\langle x\rangle$ le sous-groupe $\langle X\rangle$.
a) Montrer que l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^* \mid \; x^k = 1_G\right\}$ possède un plus petit élément m, appelé l'*ordre de x*.
b) Montrer que $\left|\langle x\rangle\right| = m$.
c) En déduire que $x^{|G|} = 1_G$ grâce au théorème de Lagrange de l'exercice précédent.

---

14 Soit G un groupe.
1) ◷ On suppose que $x^2 = 1_G$ pour tout $x \in G$. Montrer que G est commutatif.
2) ◷◷ On suppose que $(xy)^3 = x^3y^3$ pour tous $x, y \in G$ et que tout élément de G peut être écrit comme un cube.
a) Montrer que $x^3y^2 = y^2x^3$ pour tous $x, y \in G$.
b) En déduire que pour tout $x \in G$, x^2 commute à tout élément de G.
c) En déduire que G est commutatif.

---

15 ◷◷ Montrer que tout groupe fini de cardinal pair contient un élément $x \neq 1_G$ pour lequel $x^2 = 1_G$.

MORPHISMES DE GROUPES

16 ◷ Montrer que les applications suivantes sont des morphismes de groupes et déterminer leur image et leur noyau : **1)** $n \longmapsto (-1)^n$ sur $\mathbb{Z}$.
2) $z \longmapsto \dfrac{z}{|z|}$ sur $\mathbb{C}^*$. **3)** $(r, u) \longmapsto ru$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{U}$.
4) $M \longmapsto \det(M)$ sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

---

17 ◷◷ On note G l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, n décrivant $\mathbb{Z}$.
1) Montrer que G est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
2) À quel groupe familier G est-il isomorphe ?

---

18 ◷◷ Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, on note σ_g l'application $x \longmapsto gxg^{-1}$ de G dans G.
1) Montrer que σ_g est un automorphisme de G pour tout $g \in G$.
2) Montrer que l'application $g \overset{\sigma}{\longmapsto} \sigma_g$ est un morphisme de groupes de G dans $\mathrm{Aut}(G)$.
3) Montrer que $\mathrm{Ker}\,\sigma = \mathrm{Z}(G)$ où $\mathrm{Z}(G)$ est le centre de G.

---

19 ◷◷ Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$, on note μ_g l'application $x \longmapsto gx$ de G dans G.
1) Montrer μ_g est une permutation de G pour tout $g \in G$.
2) Montrer que l'application $g \overset{\mu}{\longmapsto} \mu_g$ est un morphisme de groupes injectif de G dans S_G.

---

20 ◷◷
1) Soient G un groupe et $x \in G$. On pose :
$$\langle x\rangle = \left\{x^k \mid \; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
Montrer que $\langle x\rangle$ est un sous-groupe de G, puis que les endomorphismes de groupe de $\langle x\rangle$ sont exactement les applications $g \longmapsto g^n$, n décrivant $\mathbb{Z}$.
2) Déterminer : **a)** $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$. **b)** $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$.
c) $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

21
1) ◷ Montrer que les groupes $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ sont isomorphes.
2) ◷◷
a) Soit f un morphisme de groupes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_+^*$. Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ ne contient pas 2.
b) En déduire que les groupes $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}_+^*$ ne sont pas isomorphes.
3) ◷◷◷ Déterminer l'ensemble des morphismes de groupes de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}_+^*$.

---

22 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. On note f l'application $z \longmapsto \left(z^n, z^m\right)$ de $\mathbb{U}_{mn}$ sur $\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$.
1) ◷ Montrer que $\mathrm{Ker}\, f = \mathbb{U}_{m\wedge n}$.
2) ◷◷◷ Montrer que l'application $z \longmapsto \left(z^n, z^m\right)$ est un isomorphisme de $\mathbb{U}_{mn}$ sur $\mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n$ si et seulement si $m \wedge n = 1$.

---

23 ◷◷◷ Soient G et G' deux groupes isomorphes. Montrer que $\mathrm{Aut}(G)$ et $\mathrm{Aut}(G')$ sont isomorphes.

---

24 Soient G un groupe fini et φ un morphisme de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$. Calculer $\sum_{x\in G} \varphi(x)$.

ANNEAUX

25 Montrer que $\mathbb{Q}\big(\sqrt{3}\big) = \big\{a + b\sqrt{3} \ \big| \ a,b \in \mathbb{Q}\big\}$ est un corps.

---

26 On note A l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, a et b décrivant $\mathbb{Z}$.

1) Montrer que A est un anneau pour les lois d'addition et de multiplication matricielles.
2) Déterminer $\mathrm{U}(A)$.

27

1) L'anneau $\big(\mathbb{R}^\mathbb{R}, +, \times\big)$ est-il intègre ?
2) Déterminer $\mathrm{U}\big(\mathbb{R}^\mathbb{R}\big)$.

28

1) On note A l'ensemble des rationnels $\dfrac{p}{2^n}$, (p,n) décrivant $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$.
   a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.
   b) Déterminer $\mathrm{U}(A)$.
2) Mêmes questions avec l'ensemble des décimaux, i.e. des rationnels $\dfrac{p}{10^n}$.

29

1) On rappelle que $\mathbb{Z}[\mathrm{i}] = \big\{a + \mathrm{i}b \ \big| \ a,b \in \mathbb{Z}\big\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{Z}[\mathrm{i}]$: $|z|^2 \in \mathbb{N}$, puis en déduire $\mathrm{U}\big(\mathbb{Z}[\mathrm{i}]\big)$.
2) Montrer que l'ensemble :
$$\mathbb{Z}\big[\mathrm{i}\sqrt{2}\big] = \big\{a + \mathrm{i}b\sqrt{2} \ \big| \ a,b \in \mathbb{Z}\big\}$$
est un sous-anneau de $\mathbb{C}$, puis déterminer $\mathrm{U}\Big(\mathbb{Z}\big[\mathrm{i}\sqrt{2}\big]\Big)$.

---

30 Soit $n \in \mathbb{Z}$. On note A l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & nb \\ b & a \end{pmatrix}$, a et b décrivant $\mathbb{Q}$.

1) Montrer que A est un sous-anneau commutatif de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2) Montrer que A est un corps si et seulement si n N'est PAS un carré parfait.

---

31 On a vu en cours que les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont exactement les ensembles $n\mathbb{Z}$, n décrivant $\mathbb{N}$.

1) Montrer que $\mathbb{Z}$ est le seul sous-anneau de $\mathbb{Z}$.
2) Montrer que pour tous $a,b \in \mathbb{Z}$, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, puis que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\mathbb{Z}$.

---

32 Soit E un ensemble. Pour tous $A,B \in \mathscr{P}(E)$, on appelle *différence symétrique de A et B*, notée $A \,\Delta\, B$, l'ensemble $\big(A \setminus B\big) \cup \big(B \setminus A\big)$.

1) Montrer que $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ pour tous $A,B \in \mathscr{P}(E)$.
2) Montrer que $\big(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap\big)$ est un anneau commutatif.
3) Déterminer $\mathrm{U}\big(\mathscr{P}(E)\big)$. L'anneau $\big(\mathscr{P}(E), \Delta, \cap\big)$ est-il intègre ?
4) Soit F une partie de E. Montrer que $\mathscr{P}(F)$ n'est pas loin d'être un sous-anneau de $\mathscr{P}(E)$. Quelle propriété lui manque-t-il ?

---

33 Soit A un anneau intègre. Pour tous $a,b \in A$, on dit que *a divise b* (*dans A*), ce qu'on note $a \mid b$, si $b = ak$ pour un certain $k \in A$. Montrer que pour tous $a,b \in A$:
$$a \mid b \ \text{ et } \ b \mid a \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, u \in \mathrm{U}(A), \quad b = au.$$

---

34 Soit A un anneau. Un élément $x \in A$ est dit *nilpotent* si $x^n = 0_A$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que si A est intègre, 0_A est le seul élément nilpotent de A.
2) Montrer que la somme et le produit de deux éléments nilpotents de A qui commutent sont encore nilpotents.
3) Pour tout $x \in A$ nilpotent, montrer que $1_A - x$ est inversible et déterminer $(1_A - x)^{-1}$.

---

35 Soit A un *anneau de Boole*, i.e. un anneau non nul pour lequel $x^2 = x$ pour tout $x \in A$.

1) Montrer que A est commutatif.
2) Déterminer A dans le cas où A est intègre.
3) On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur A en posant pour tous $x,y \in A$: $\quad x \preccurlyeq y \iff yx = x$. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

---

36 Soit A un anneau.

1) On appelle *centre de A* et on note $\mathrm{Z}(A)$ l'ensemble des éléments de A qui commutent à TOUT élément de A. Montrer que $\mathrm{Z}(A)$ est un sous-anneau de A.
2) On suppose que $x^3 = x$ pour tout $x \in A$.
   a) Montrer que : $\quad xy = 0_A \implies yx = 0_A$ pour tous $x,y \in A$.
   b) Soit $x \in A$. On suppose que $x^2 = x$. Montrer que $x \in \mathrm{Z}(A)$ en étudiant $x(y - xy)$ pour tout $y \in A$.
   c) Montrer que $x^2 \in \mathrm{Z}(A)$ pour tout $x \in A$.
   d) Montrer enfin que A est commutatif.

Le *théorème de Jacobson* — difficile — énonce plus généralement que A est comutatif si :
$$\forall x \in A, \quad \exists\, n \geqslant 2, \quad x^n = x.$$

37

1) Les anneaux $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont-ils isomorphes ?

2) Déterminer tous les endomorphismes d'anneau de $\mathbb{C}$ dont la restriction à $\mathbb{R}$ est la fonction identité.

GROUPES SYMÉTRIQUES

38

1) On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 7 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Écrire $\sigma\theta$ et σ^{-1} comme des produits de cycles disjoints.

2) Écrire la permutation :

$$(1\,2)\,(2\,4\,6\,5)\,(1\,3\,7)\,(2\,5\,4)\,(3\,5\,6\,1)\,(2\,5)\,(1\,4\,6)$$

comme un produit de cycles disjoints.

3) Calculer la signature des permutations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

et $(1\ 3\ 4)\ (2\ 4\ 3\ 1)\ (2\ 3)$.

---

39 On note A_n l'ensemble des permutations paires de S_n. Montrer que A_n est un sous-groupe de cardinal $\frac{n!}{2}$ de S_n.

40

1) Simplifier $\sigma\,(a_1\ a_2\ \ldots\ a_p)\,\sigma^{-1}$ pour tous $\sigma \in S_n$ et $a_1, \ldots, a_p \in [\![1, n]\!]$ distincts avec $p \geqslant 2$.

2) Montrer que toute permutation de $[\![1, n]\!]$ est un produit de transpositions $(1\ i)$, i décrivant $[\![2, n]\!]$.

3) Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, Id est la seule permutation de $[\![1, n]\!]$ qui commute à tout élément de S_n.

4)

a) Montrer que toute permutation de $[\![1, n]\!]$ est un produit de transpositions $(i\ \ i+1)$, i décrivant $[\![1, n-1]\!]$.

b) En déduire que toute permutation de $[\![1, n]\!]$ est un produit des permutations $(1\ 2)$ et $(1\ 2\ \ldots\ n)$.
