PRIMITIVATION DIRECTE ET TECHNIQUES PARTICULIÈRES

1 Déterminer directement sans aucun calcul d'intégrale une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x\mathrm{e}^{-3x^2}$. 2) $x \longmapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^4}$.
3) $x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)^2}$. 4) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\ln x}$.
5) $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$. 6) $x \longmapsto \dfrac{x^2}{1+x^3}$.
7) $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{x}$. 8) $x \longmapsto \tan^2 x$.
9) $x \longmapsto \dfrac{\sin(2x)}{1+\cos^2 x}$. 10) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$.
11) $x \longmapsto \dfrac{1}{\cos^2 x\sqrt{\tan x}}$. 12) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$.
13) $x \longmapsto \dfrac{\ln\ln x}{x}$. 14) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}$.
15) $x \longmapsto \dfrac{1}{x+x(\ln x)^2}$. 16) $x \longmapsto \sqrt{x^4+x^2}$.
17) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x^3}}$. 18) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

---

2 Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \cos^4 x \sin^2 x$. 2) $x \longmapsto \cos^3 x \sin^4(2x)$.

---

3 Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1) a) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$. b) $x \longmapsto \dfrac{2-5x}{1+x^2}$.
c) $x \longmapsto \dfrac{3x+2}{2x^2-4x+3}$. d) $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x^2-2x+5}$.

2) $x \longmapsto \dfrac{1}{x^3-1}$.

---

4 Calculer grâce à l'exponentielle complexe :

1) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin(3t)\,\mathrm{d}t$.
2) une primitive de $x \longmapsto \sin x \operatorname{sh} x$.

INTÉGRATION PAR PARTIES

5 Calculer par intégration par parties :

1) l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{e}^t \sin(3t)\,\mathrm{d}t$.
2) une primitive de $x \longmapsto \sin x \operatorname{sh} x$.

---

6 Calculer une primitive des fonctions suivantes en intégrant par parties :

1) $x \longmapsto \operatorname{Arctan} x$. 2) $x \longmapsto (x\ln x)^2$.
3) $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^x$. 4) $x \longmapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$.
5) $x \longmapsto \ln\left(1+x^2\right)$. 6) $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$.
7) $x \longmapsto x\operatorname{ch} x$. 8) $x \longmapsto x\sin^2 x$.
9) $x \longmapsto x\operatorname{Arctan} x$. 10) $x \longmapsto \mathrm{e}^{\operatorname{Arcsin} x}$.

---

7 Pour tous $p,q \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_{p,q} = \int_0^1 x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x.$$

1) Montrer que $I_{p,q} = \dfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$ pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2) En déduire une expression explicite de $I_{p,q}$ en fonction de p et q pour tous $p,q \in \mathbb{N}$.
3) En déduire enfin une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} \frac{(-1)^k}{p+k+1}$ pour tous $p,q \in \mathbb{N}$.

CHANGEMENT DE VARIABLE

8 Calculer une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}$ en posant $t = \sqrt{\mathrm{e}^x-1}$.
2) $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ en posant $t = \sqrt{1+x}$.
3) $x \longmapsto \dfrac{1}{\operatorname{ch} x}$ en posant : a) $t = \mathrm{e}^x$. b) $t = \operatorname{sh} x$. c) $t = \operatorname{th} x$.
4) $x \longmapsto \sin(\ln x)$ en posant $t = \ln x$.
5) $x \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ en posant $t = \sqrt{x^2-1}$.
6) $x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$ en posant $x = \sin t$.
7) $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\tan x}$ en posant $t = \tan x$.
8) $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin x + \sin(2x)}$ en posant $t = \cos x$.
9) $x \longmapsto x^\alpha \ln x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ en posant $x = t^\beta$ pour un certain β à préciser.

---

9 Calculer :

1) $\displaystyle\int_{-1}^{1} t^2\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \sin\theta$.
2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t+1}$ en posant $x = \mathrm{e}^t$.
3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\cos\theta}$ en posant $x = \sin\theta$.
4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t+1}}$ en posant $x = \sqrt{t^2+t+1}-t$.
5) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{\ln t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \dfrac{1}{t}$.

10

1) Retrouver les expressions de $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $\tan\dfrac{x}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\pi + 2\pi\mathbb{Z}\right)$.
2) Calculer, en posant $t = \tan\dfrac{x}{2}$, une primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{2+\sin x+\cos x}$.

---

11 On pose :
$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad C=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que $S=C$ par changement de variable. En déduire S et C.

2) En déduire $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

---

12 On pose :
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos^2 t}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{\cos(2t)}\,\mathrm{d}t.$$

1) Calculer $I-J$.

2) Calculer $I+J$ en posant $x=\tan t$.

3) En déduire I et J.

13

1) Soit $f\in\mathscr{C}\big([0,\pi],\mathbb{R}\big)$. Montrer grâce à un changement de variable très simple que :
$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

2) En déduire $\displaystyle\int_0^\pi\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ en posant $t=\tan\frac{x}{2}$.

---

14 On fait semblant de **NE PAS** connaître la fonction logarithme. Montrer que pour tous $x,y>0$:
$$\int_1^{xy}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int_1^y\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

More thinking is needed

15 Soient $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a\leqslant b$ et $f\in\mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{C}\big)$. On suppose $|f'|$ majorée par un certain $M\geqslant 0$ sur $[a,b]$. Montrer l'*inégalité des accroissements finis* :
$$\big|f(b)-f(a)\big|\leqslant M\,|b-a|.$$

---

16 Pas d'étude de fonction dans cet exercice ! Montrer, en exploitant la croissance de l'intégrale, que :

1) pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$: $\tan x\geqslant x$.

2) pour tout $x\geqslant 0$: **a)** $\sin x\leqslant x$. **b)** $\cos x\geqslant 1-\dfrac{x^2}{2}$. **c)** $\cos x\leqslant 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$.

2) pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\geqslant 0$: $\displaystyle e^x\geqslant\sum_{k=0}^n\frac{x^k}{k!}$.

---

17 Soit $f\in\mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, puis interpréter géométriquement.

18

1) Soit $f\in\mathscr{C}\big([-a,a],\mathbb{C}\big)$ impaire. Montrer que :
$$\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$$
en dérivant la fonction $\displaystyle x\longmapsto\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

2) Adapter la preuve et le résultat de la question **1)** dans le cas où f est paire.

3) Adapter la preuve et le résultat de la question **1)** dans le cas où $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est périodique.

---

19 Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leurs dérivées :

1) $\displaystyle x\longmapsto\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$. **2)** $\displaystyle x\longmapsto\int_\pi^{2\pi}\frac{\cos(tx)}{t}\,\mathrm{d}t$.

3) $\displaystyle x\longmapsto\int_0^x f\big(t+x^2\big)\,\mathrm{d}t$.

---

20 Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Montrer que la fonction :
$$x\overset{\varphi}{\longmapsto}\int_0^{2\pi}f(x-t)\,e^{it}\,\mathrm{d}t$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$\varphi'(x)=i\,\varphi(x)+f(x)-f(x-2\pi).$$

21

1) Soit $z\in\mathbb{C}$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$e^z=\sum_{k=0}^n\frac{z^k}{k!}+\frac{z^{n+1}}{n!}\int_0^1 e^{zt}\,(1-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\left|e^z-\sum_{k=0}^n\frac{z^k}{k!}\right|\leqslant\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\,e^{|\mathrm{Re}(z)|}.$$

c) En déduire que $\displaystyle e^z=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{k!}$.

2) On suppose par l'absurde que e est rationnel, i.e. que $e=\dfrac{p}{q}$ pour certains $p,q\in\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\left|n!p-q\sum_{k=0}^n\frac{n!}{k!}\right|\leqslant\frac{p}{n+1}.$$

b) En déduire une contradiction.