1 MODÉLISATION AVEC LOIS USUELLES

1 Une urne contient n boules noires et b blanches. Un joueur tire k boules dans cette urne successivement avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne g points, et sinon il en perd 1. Quelle valeur de g faut-il choisir pour que le jeu soit d'espérance nulle ?

---

2 On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

---

3 Un industriel reçoit d'un fournisseur un lot de n produits de numéros de série $1, 2, \ldots, n$. Il contrôle leur bon fonctionnement en les passant en revue les uns après les autres au hasard et sans remise. On note D le numéro de série du dernier produit contrôlé. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de D.

---

4 On choisit une permutation σ au hasard dans S_n et on note L la longueur du cycle dans lequel 1 apparaît quand on décompose σ en produit de cycles disjoints. Montrer que L suit la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

---

5 On lance n fois une pièce, puis de nouveau n fois.

1) Avec quelle probabilité p_n a-t-on obtenu les deux fois le même nombre de FACES ?
3) Déterminer un équivalent simple de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

6

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note n la plus grande valeur de X. Montrer l'égalité : $\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.
2) On lance n fois un dé équilibré à 6 faces et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le numéro de la face obtenue au $i^{\text{ème}}$ lancer.
On pose en outre : $M_n = \max\left\{X_1, \ldots, X_n\right\}$.
   a) Calculer $P(M_n \leqslant k)$ pour tout $k \in [\![1, 6]\!]$.
   b) En déduire l'espérance de M_n, puis sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.
   c) Montrer que la suite $\big(\mathrm{E}(M_n)\big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante. À partir de quelle valeur de n est-il vrai que : $\mathrm{E}(M_n) \geqslant 5$?

---

7 Dans une usine de conditionnement de cerises griottes, un lot de n cerises défile sur un tapis roulant et un détecteur mesure le diamètre de chacune. Les cerises sont réputées « naines » en-dessous d'un certain seuil et un compteur enregistre au fur et à mesure le nombre de cerises naines observées. Au départ, le compteur affiche « 00 », et il cesse d'être incrémenté lorsqu'il atteint « 99 ».
La proportion théorique de cerises naines dans la population totale des cerises griottes est notée p et on suppose que : $p \in]0, 1[$. On note en outre N_n le nombre de cerises naines observées à l'issue du contrôle des n cerises et C_n le nombre affiché finalement par le compteur.

1) Déterminer la loi de N_n et exprimer C_n en fonction de N_n.
2) Montrer l'égalité :
$$\mathrm{E}(C_n) = 99 - \sum_{k=0}^{98} (99 - k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$
3) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{E}(C_n)$. Le résultat obtenu est-il naturel ?

---

8 On dispose d'un dé à 6 faces et d'une pièce de monnaie. Après avoir effectué n lancers de dé, on lance la pièce autant de fois qu'on a obtenu « 6 » avec le dé. On note S le nombre de « 6 » obtenus avec le dé et F le nombre de FACES obtenues avec la pièce.

1) Déterminer la loi de S.
2) a) Déterminer la loi conditionnelle de F sachant $\{S = s\}$ pour tout $s \in [\![0, n]\!]$.
   b) Vérifier que pour tous $k, s \in [\![0, n]\!]$ avec $k \leqslant s$:
$$\binom{s}{k}\binom{n}{s} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k}.$$
   c) En déduire que : $F \hookrightarrow \mathscr{B}\left(n, \dfrac{1}{12}\right)$.

---

9 On choisit une permutation de $[\![1, n]\!]$ au hasard et on note N le nombre de ses points fixes. On note en outre F_i l'événement « La permutation choisie admet i pour point fixe » pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1) Calculer $P(F_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $P(F_i \cap F_j)$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$.
2) Exprimer N en fonction des événements $F_1, \ldots, F_n$, puis en déduire l'espérance de N.
3) a) Calculer $\mathrm{cov}(\mathbb{1}_{F_i}, \mathbb{1}_{F_j})$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$.
   b) En déduire la variance de N.
4) Montrer, grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que : $P(N \geqslant 4) \leqslant \dfrac{1}{9}$.

---

10 Une urne contient initialement une boule noire et une blanche et on répète l'expérience aléatoire suivante — on tire une boule, on la remet dans l'urne et on ajoute aussitôt une boule supplémentaire de la même couleur. Ce modèle d'urne est connu sous le nom d'*urne de Pólya*.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne après k tirages. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k suit la loi uniforme $\mathscr{U}\big([\![1, k+1]\!]\big)$.

---

2 MODÉLISATION SANS LOIS USUELLES

11 ◷◷ On tire une boule dans une urne contenant, pour tout $k \in [\![1,2n]\!]$, exactement k boules indiscernables portant le numéro « k ». On note N le numéro de la boule tirée.

1) Déterminer la loi et l'espérance de N.
2) Calculer la probabilité de l'événement « $N > n$ ». Quelle limite quand n tend vers $+\infty$?
3) Calculer la probabilité de l'événement « N est pair ». Quelle limite quand n tend vers $+\infty$?

---

12 ◷◷ Deux joueurs lancent chacun n fois un dé équilibré à 6 faces. Ils lancent à chaque coup leurs dés en même temps. Avec quelle probabilité obtiennent-ils chacun leur premier « 6 » en même temps ?

---

13 ◷◷ On tire simultanément k boules d'une urne en contenant n numérotées de 1 à n et on note N le plus grand numéro tiré.

1) Déterminer la loi de N, puis montrer que :

$$\mathrm{E}(N) = k \times \frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=k}^{n}\frac{i!}{(i-k)!}.$$

2) On note Q le polynôme $\displaystyle\sum_{i=k}^{n}(X+1)^i$.
a) Exprimer $\mathrm{E}(N)$ en fonction de $Q^{(k)}(0)$.
b) En déduire l'égalité : $\mathrm{E}(N) = \dfrac{(n+1)k}{k+1}$.

---

14 ◷◷◷ Un joueur dispose de n fléchettes pour éclater un ballon. Sa probabilité de réussite à chaque tir est notée p et on suppose que : $p \in]0,1[$. On note N le nombre de fléchettes utilisées à l'issue de la partie, que le ballon ait éclaté ou non et sachant que le joueur arrête de lancer ses fléchettes dès que le ballon éclate.

1) Déterminer la loi de N.
2) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, si le ballon a éclaté, avec quelle probabilité a-t-il éclaté avec la $k^{\text{ème}}$ fléchette ?
3) Calculer l'espérance de N. Quelle limite lorsque n tend vers $+\infty$?

---

15 ◷◷◷ On passe en revue dans un ordre quelconque une liste de n symboles dont exactement deux « $\aleph$ ». On note A_1 le rang de la première apparition d'un tel « $\aleph$ » et A_2 celui de la deuxième apparition.

1) Déterminer la loi et l'espérance de A_1.
2) **a)** Déterminer la loi conditionnelle de A_2 sachant $\{A_1 = i\}$ pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$.
b) En déduire la loi et l'espérance de A_2.

---

16 On tire n entiers au hasard dans $[\![1,2n]\!]$. On tire ces entiers simultanément dans la question **1)** et on note S le plus petit entier tiré. On les tire successivement avec remise dans la question **2)** et on note A le plus petit entier tiré.

1) ◷◷
a) Calculer $P(S > k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.
b) En déduire la loi de S.
2) ◷◷
a) Calculer $P(A > k)$ pour tout $k \in [\![0,2n-1]\!]$.
b) En déduire la loi de A.
3) ◷◷◷ On note à présent S_n et A_n les variables S et A car on va faire tendre n vers $+\infty$. Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n = k)$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, puis discuter ces résultats.

---

17 ◷◷◷ On dispose de deux urnes. La première contient initialement 1 boule blanche et 1 noire, et la seconde 2 boules blanches et 1 noire. On prélève simultanément une boule dans chacune des deux urnes et on les change aussitôt d'urne. Cette expérience est répétée un nombre indéfini de fois.
On pose : $X_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k le nombre de boules blanches dans la première urne à l'issue du $k^{\text{ème}}$ échange.

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer la loi de X_{k+1} en fonction de la loi de X_k.
2) On pose : $M = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$: $C_k = \begin{pmatrix} P(X_k = 0) \\ P(X_k = 1) \\ P(X_k = 2) \end{pmatrix}$.
a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $C_{k+1} = MC_k$.
b) Déterminer pour tout $x \in [\![0,2]\!]$, après avoir diagonalisé M, la limite : $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} P(X_k = x)$.

---

18 ◷◷◷ Soit $M = (R_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice aléatoire dont les coefficients sont des variables indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose : $D = \det(M)$.

1) Calculer l'espérance et la variance de D.
2) En déduire : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\Big(|D| \geqslant \sqrt{(n+1)!}\Big)$.

---

3 MANIPULATION FORMELLE DE VARIABLES ALÉATOIRES

19 ◷ Soient A et B deux événements pour lesquels : $P(A) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = \dfrac{1}{3}$ et $P(A \cap B) = \dfrac{1}{4}$. Déterminer la loi, l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire $\mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_B$.

---

20 ◷ Soient $p \in [0,1]$. Retrouver, par une technique polynomiale, les valeurs de l'espérance et de la variance de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

---

21 ◷ Soient $m,n \in \mathbb{Z}$ avec : $m \leqslant n$ et U une variable aléatoire de loi uniforme $\mathscr{U}\big([\![m,n]\!]\big)$.

1) Calculer la variance de U dans le cas où : $m = 1$.
2) En déduire la variance de U dans le cas général.

---

22 Soit (X,Y) une variable aléatoire de loi uniforme $\mathscr{U}\big([\![0,n]\!]^2\big)$.
1) Déterminer les lois de X, Y et $X+Y$.
2) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

---

23 Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme $\mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$. On pose :

$$I = \min\{U,V\} \qquad \text{et} \qquad S = \max\{U,V\}.$$

1) **a)** Déterminer la loi de I.
b) En déduire l'espérance de I.
2) Les variables aléatoires I et S sont-elles indépendantes ?
3) Calculer l'espérance de S sans déterminer sa loi.
4) Déterminer la loi du couple (I,S).

---

24 Soient X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme $\mathscr{U}\big([\![1,n]\!]\big)$.
1) Déterminer la loi de $X+Y$.
2) Calculer $P(X+Y=Z)$.

---

25 Soient $p \in \,]0,1[$ et $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires sur un même espace probabilisé, indépendantes et de mêmes lois définies pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ par :

$$P(X_k = 1) = p \qquad \text{et} \qquad P(X_k = -1) = 1-p.$$

On pose pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: $\displaystyle \Pi_k = \prod_{i=1}^k X_i$ et :

$$u_k = P(\Pi_k = 1) \qquad \text{et} \qquad v_k = P(\Pi_k = -1).$$

1) **a)** Montrer que pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$:

$$u_{k+1} = pu_k + (1-p)v_k \qquad \text{et} \qquad v_{k+1} = (1-p)u_k + pv_k.$$

b) Déterminer, grâce à $u_k + v_k$ et $u_k - v_k$, une expression explicite de u_k et v_k en fonction de k pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Interpréter le résultat pour de grandes valeurs de k.
2) **a)** Montrer que si : $p = \dfrac{1}{2}$, les variables aléatoires $\Pi_1,\dots,\Pi_n$ sont indépendantes.
b) Montrer que si Π_1 et Π_2 sont indépendantes, alors : $p = \dfrac{1}{2}$.

---

26 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. Est-il possible que la somme $X+Y$ suive la loi uniforme $\mathscr{U}\big([\![2,2n]\!]\big)$?

27
1) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini (Ω,P). Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on appelle *espérance conditionnelle de X sachant* $\{Y=y\}$, notée $\mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)$, l'espérance de X pour la probabilité conditionnelle $P_{\{Y=y\}}$. Montrer que : $\displaystyle \mathrm{E}(X) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \mathrm{E}_{\{Y=y\}}(X)\, P(Y=y)$.
2) Soient $X_1,\dots,X_n$ et T des variables aléatoires indépendantes. On suppose T à valeurs dans $[\![1,n]\!]$ et $X_1,\dots,X_n$ de même loi.
On pose : $\displaystyle S_T = \sum_{k=1}^T X_k$.
a) Montrer que : $\mathrm{E}(S_T) = \mathrm{E}(T)\,\mathrm{E}(X_1)$.
b) On suppose à présent que $X_1,\dots,X_n$ sont centrées. Montrer que : $\mathrm{V}(S_T) = \mathrm{E}(T)\mathrm{V}(X_1)$.

---

4 INÉGALITÉS PROBABILISTES

28 Soit X une variable aléatoire. Pour quel(s) réel(s) x la quantité $\sqrt{\mathrm{E}\big((X-x)^2\big)}$ est-elle minimale ?

---

29 Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec : $a \leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$.
1) **a)** Montrer que :

$$\big(b-\mathrm{E}(X)\big)\big(\mathrm{E}(X)-a\big) = \mathrm{V}(X) + \mathrm{E}\big((b-X)(X-a)\big).$$

b) En déduire l'*inégalité de Bathia-Davis* :

$$\mathrm{V}(X) \leqslant \big(b-\mathrm{E}(X)\big)\big(\mathrm{E}(X)-a\big).$$

2) **a)** Montrer que :

$$\left(\mathrm{E}(X) - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \big(b-\mathrm{E}(X)\big)\big(\mathrm{E}(X)-a\big) = \frac{(b-a)^2}{4}.$$

b) En déduire l'*inégalité de Popoviciu* :

$$\mathrm{V}(X) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4}.$$

3) Calculer la variance de $(b-a)X+a$ dans le cas où X suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Qu'en déduit-on ?

---

30 Soient $a,b \in \mathbb{R}$ avec : $0 < a \leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$.
1) Montrer que : $\dfrac{1}{X} \leqslant \dfrac{a+b-X}{ab}$.
2) En déduire l'inégalité : $\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X}\right) \leqslant \dfrac{(a+b)^2}{4ab}$.

---

31 Soit X une variable aléatoire centrée. Montrer l'inégalité : $\mathrm{E}\big(|X|\big) \leqslant \sqrt{\mathrm{V}(X)}$.

---

32 ◷◷ Soit X une variable aléatoire centrée à valeurs dans $[-1,1]$. On note σ son écart-type.

1) Montrer que pour tous $t \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$:

$$P(X \geqslant \alpha) \leqslant \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right).$$

2) **a)** Déterminer le minimum sur $[-1,1]$ de la fonction $u \longmapsto \left(1+u+u^2\right)\mathrm{e}^{-u}$.

b) En déduire que pour tout $t \in [0,1]$:

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{tX}\right) \leqslant 1+\sigma^2 t^2.$$

3) En déduire que pour tout $\lambda \in [0,2\sigma]$:

$$P(X \geqslant \lambda\sigma) \leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

4) En déduire que pour tout $\lambda \in [0,2\sigma]$:

$$P\left(|X| \geqslant \lambda\sigma\right) \leqslant 2\mathrm{e}^{-\frac{\lambda^2}{4}}.$$

---

33 ◷◷◷ Soient X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1) Montrer que pour tout $t \geqslant 0$:

$$P\Big(X-\mathrm{E}(X) \geqslant a\Big) \leqslant \frac{t^2+\mathrm{V}(X)}{(t+a)^2}.$$

2) En déduire l'inégalité :

$$P\Big(X-\mathrm{E}(X) \geqslant a\Big) \leqslant \frac{\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X)+a^2}.$$

3) Montrer enfin l'*inégalité de Cantelli* :

$$P\Big(\big|X-\mathrm{E}(X)\big| \geqslant a\Big) \leqslant \frac{2\,\mathrm{V}(X)}{\mathrm{V}(X)+a^2}.$$

Comparer cette inégalité avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

---

5 LOI HYPERGÉOMÉTRIQUE

34 On s'intéresse à un jeu dans lequel, sur un total de n numéros, g sont choisis à l'avance comme gagnants par le meneur du jeu et connus de lui seul.

On suppose que : $1 \leqslant g \leqslant \dfrac{n}{3}$.

Dans la première phase du jeu, le joueur tire au hasard g numéros, après quoi le meneur dévoile g numéros perdants parmi les $n-g$ que le joueur n'a pas tirés. Dans la deuxième phase du jeu, le joueur a le choix entre deux stratégies :

— **Stratégie A :** Il garde les g numéros qu'il a tirés.

— **Stratégie B :** Il échange les g numéros qu'il a tirés contre g nouveaux numéros tirés au hasard parmi les $n-2g$ numéros qui n'ont été ni tirés ni dévoilés pendant la première phase.

1) On note G_1 le nombre de numéros gagnants obtenus à l'issue de la première phase. Déterminer la loi et l'espérance de G_1.

2) On étudie spécifiquement dans cette question la stratégie **B**. On note G_2 le nombre de numéros gagnants obtenus parmi les g numéros tirés pendant la deuxième phase.

a) Déterminer la loi conditionnelle de G_2 sachant $\left\{G_1=k\right\}$ pour tout $k \in [\![0,g]\!]$.

b) En déduire pour tout $k \in [\![0,g]\!]$ l'espérance conditionnelle de G_2 sachant $\left\{G_1=k\right\}$, notée $\mathrm{E}_{\{G_1=k\}}(G_2)$ — i.e. l'espérance de G_2 pour la probabilité conditionnelle $P_{\{G_1=k\}}$.

c) Montrer l'égalité :

$$\mathrm{E}(G_2) = \sum_{k=0}^{g} \mathrm{E}_{\{G_1=k\}}(G_2)\,P(G_1=k).$$

d) En déduire que : $\mathrm{E}(G_2) = \dfrac{g^2(n-g)}{n(n-2g)}$.

3) Des stratégies **A** et **B**, laquelle est préférable si l'on veut le plus possible de numéros gagnants ?
