Factorisation irréductible et théorème de d'Alembert-Gauss

1

2

3) Un polynôme, c'est un coefficient dominant et des racines… comptées avec multiplicité !

3 On sait factoriser a^2+b^2 pour tous $a,b\in\mathbb{C}$.

4

3) S'intéresser à la factorisation irréductible du polynôme annulateur de la question **2)**.

4) L'inversibilité d'une matrice s'interprète bien en termes de noyau.

5

1) S'intéresser au signe de P au voisinage de toute racine réelle.

2) Pour tous $x,y\in\mathbb{R}$: $\quad x^2+y^2=(x+iy)\overline{(x+iy)}$.

6

1) a) À partir d'une racine, on sait donc en créer plein, mais quand même pas un nombre infini !

Arithmétique des polynômes

7

8

9

1) En notant r le reste de la division euclidienne de n par m, montrer que le reste cherché vaut X^r-1.

2) Algorithme d'Euclide !

10

11 Par récurrence.

12 Vérifier d'abord que $\operatorname{Ker}P(f)+\operatorname{Ker}Q(f)\subset\operatorname{Ker}(PQ)(f)$. Pour le reste, exploiter une relation de Bézout entre P et Q.

13

Fractions rationnelles

14 Raisonner par l'absurde, introduire une primitive R de $\dfrac{1}{X}$ et s'intéresser à la multiplicité de 0 dans R — qui est un entier relatif.

15

16

1) On sait dériver un produit PQ. Quelle formule pour dériver un produit $P_1\dots P_n$? En notant $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les racines de P dans $\mathbb{C}$ et $m_1,\dots,m_n$ leurs multiplicités respectives : $\quad \dfrac{P'}{P}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{X-\lambda_k}$.

17

1) b) Pour commencer, dériver la décomposition trouvée en **a)**.

2) a) Non !

b) Non plus !

3) S'intéresser à la fonction $x\longmapsto\dfrac{P'(x)}{P(x)}$.

18

19

20

21

22

23

24

25

2) Montrer par récurrence que la fonction I_n possède une limite ℓ_n en $+\infty$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et exprimer ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n.

26