1

Inégalité de Cauchy-Schwarz

2

3 Dans tous les cas, il s'agit d'interpréter l'inégalité visée comme une inégalité de Cauchy-Schwarz dans un certain contexte. Quel espace préhilbertien avec quel produit scalaire ? Quels vecteurs ?

6) Vérifier que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-t)f'(t)\,\mathrm{d}t$.

7) Vérifier que $X\mathbb{1}_{\{X\geqslant 1\}} = X$.

4

1) Théorème des bornes atteintes.

2) Majorer a_{n+1} en fonction de a_n et a_{n+2} pour tout $n\in\mathbb{N}$.

5

6

Orthogonalité

7

8

9

10

11 Montrer que $P^\top P = I_n$ où $n = \dim E$.

12

13

1) Raisonner par analyse-synthèse et exprimer le produit scalaire cherché en fonction des formes coordonnées associées à $\mathscr{B}$.

14 Partir d'un vecteur φ quelconque de $F^\perp$ et trouver des exemples de vecteurs de F qui lui sont orthogonaux.

1) Se ramener à la situation d'une intégrale nulle de fonction positive.

2) Peut-être une IPP ?

15

2) b) Pour la fin de la question, observer que pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$: $\quad m_{ij} = \big\langle u(e_i), e_j\big\rangle$.

16

2) Vive la bilinéarité du produit scalaire et la linéarité de l'espérance !

Projection orthogonale

17

1)2) Dans les deux cas, F est un hyperplan, c'est pratique.

18

19

20

1) Transformer $d(x,\mathscr{H})$ en une distance $d(\dots,H)$ pour se ramener au contexte vectoriel du cours.

2) Appliquer soigneusement **1)**.

21

22

1) c) Montrer que $PA = P$, puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2) b) Observer entre autres que $\mathrm{rg}(B) \leqslant 2\,\mathrm{rg}(A)$.

23

1) Que dire d'une fonction polynomiale de degré 2 positive sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

24

25

3) La caractérisation de $F^\perp$ de la question **2)** rend le calcul facile.

5) En notant e une fonction fixée de E et p la projection orthogonale sur F, montrer que :
$$\inf_{f \in E} \int_0^1 \left(f(t)^2 + f'(t)^2 \right) \mathrm{d}t = \left\| p(e) \right\|^2.$$
Pour le calcul final, exprimer d'abord $\|\mathrm{sh}\|^2$, $\|\mathrm{ch}\|^2$ et $\langle \mathrm{ch}, \mathrm{sh} \rangle$ en fonction de c et s.

26