EN VRAC

1

— Mise en facteur du terme dominant au numérateur et au dénominateur,
— quantité conjuguée $\sqrt{x}-\sqrt{y}=\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$,
— encadrement/minoration/majoration.

2

3

4

1) Théorème de la limite monotone.
2) Écrire u_n (ce qu'on veut) en fonction de $(n+1)u_n^2$ (ce qu'on connaît).

5

1) a) Théorème de la limite monotone.

6

7

---

8 Adapter une preuve de cours du paragraphe « Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration ».

---

9 Adapter une preuve de cours du paragraphe « Théorèmes d'encadrement/minoration/majoration ».

---

10 Commencer par exemple par montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

SUITES EXTRAITES

11

12

---

13 Raisonner par l'absurde et passer à la limite dans les formules de trigonométrie relatives à la tangente.

---

14 Raisonner par l'absurde et passer à la limite dans les formules de trigonométrie relatives au cosinus et au sinus.

15

2) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$:
$$\left\lfloor\sqrt{b^2n^2+2an}\right\rfloor=bn.$$

---

16 Soit $\theta\in[0,\pi]$. Pour garantir que :
$$\lim_{n\to+\infty}\cos\big(\ln\varphi(n)\big)=\cos\theta,$$
trouver par exemple une fonction d'extraction φ pour laquelle pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad \ln\varphi(n)\approx\theta+2n\pi$.

17

2) Soient a et b deux valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $a<b$. Soit $x\in[a,b]$. Fixer $\varepsilon>0$ et $N\in\mathbb{N}$, puis chercher un entier $M\in\mathbb{N}$ pour lequel $u_M<x<u_{M+1}$ et $u_{M+1}-u_M<\varepsilon$.

SUITES ADJACENTES

18

19

2) a) Pour tout $x>-1$: $\quad \ln(1+x)\leqslant x$.

b) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ en fonction de sommes du genre $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\ldots$

SUITES RÉCURRENTES $u_{n+1}=f(u_n)$

20

21

22

23

2) b) Calculer dans un premier temps $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{v_n}{n}$, puis exprimer $\dfrac{u_n}{\ln n}$ en fonction de $\dfrac{v_n}{n}$.

COUPLES DE SUITES RÉCURRENTES

24

25

26

Suites définies implicitement

27

28

29

2) Représenter x_n sur un dessin, formuler une conjecture, puis exploiter la réciproque de la fonction $x \longmapsto x + \tan x$ pour la démontrer.

30

2) Représenter x_n sur un dessin, formuler une conjecture, puis étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Attention au passage final à la limite !

31

3) Représenter x_n sur un dessin, formuler une conjecture, puis étudier la monotonie de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

32

Bornes supérieures/inférieures

33

34 Calculer $\sup\left\{|x-y| \ \ \middle| \ \ x, y \in A\right\}$ grâce à la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

35

36

Epsilonométrie et théorèmes de type Cesàro

37

38

2) **b)** Comment transforme-t-on un problème multiplicatif en un problème additif ?

39 Adapter la preuve du théorème de Cesàro.

40 Adapter la preuve du théorème de Cesàro.

Bolzano-Weierstrass

41

2) Pour tout $x > -1$: $\ln(1+x) \leqslant x$.

3) Écrire $u_{\varphi(n)} - u_n$ comme une somme.

4) Revenir à la définition de la limite.

42

1) Raisonner par l'absurde et construire une suite extraite qui reste à distance de la valeur d'adhérence.

43

2) **a)** Revenir à la définition de la limite.

b) Utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass et revenir à la définition de la limite.

3) **c)** Écrire $u_p - u_q$ comme une somme.

Suites complexes

44

2) **a)** Étude de fonction sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, puis imparité.

b) Pour n assez grand : $\arg(z_n) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

3) Attention, $\arg(z_n)$ peut tendre vers $-\pi$ lorsque n tend vers $+\infty$.

45