(Sous-)espaces vectoriels et combinaisons linéaires

1

2

3

4

5 Chercher une solution particulière X_{part} du problème sous-jacent, vérifier que les solutions du problème homogène associé forment un sous-espace vectoriel E et que l'ensemble étudié s'écrit bien $X_{\text{part}} + E$.

6

7 Par double inclusion. Pour montrer par exemple que :
$$\operatorname{Vect}\big(x \longmapsto \cos(kx)\big)_{0\leqslant k\leqslant n} \subset \operatorname{Vect}\big(x \longmapsto \cos^k x\big)_{0\leqslant k\leqslant n},$$
il suffit de savoir écrire la fonction $x \longmapsto \cos(kx)$ comme une combinaison linéaire des fonctions $x \longmapsto \cos^0 x, \ldots, x \longmapsto \cos^n x$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Trigonométrie et nombres complexes !

Familles libres et bases

8

9

10

11 Se ramener à un problème polynomial.

12 Penser degré d'une part, penser racines d'autre part.

13

14 Pour un réel λ_0 fixé, quelle(s) propriété(s) particulière(s) la fonction $x \longmapsto |x - \lambda_0|$ a-t-elle que les autres fonctions $x \longmapsto |x - \lambda|$ n'ont pas ?

15 En notant i_0 un entier pour lequel :
$$\max\big\{|x_1|, \ldots, |x_n|\big\} = |x_{i_0}|,$$
montrer que $x_{i_0} = 0$.

16

2) Montrer d'abord que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:
$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P(k) = 0.$$

17

2) Adapter la stratégie de l'exercice précédent.

18 Adapter la stratégie des exercices précédents.

19

2) **a)** Se ramener à un problème d'arithmétique des entiers.

3) **b)** Se ramener à la situation de la question **a)**.

Bases et dimension

20

21

22

23

24 V est inversible si et seulement si la famille de ses colonnes est libre. Se ramener à un problème polynomial.

25

26

27 Écrire l'ensemble étudié comme un Vect. En cas de difficulté, commencer par comprendre la situation dans le cas $n = 2$ et $n = 3$.

28 Écrire l'ensemble étudié comme un Vect.

29 **1)** Penser dimension.

---

30 Pour tous $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, si $MN = I_n$, alors M et N sont inversibles et inverses l'une de l'autre, et donc $MN = NM$.

31

32

33

34

35

Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

36

37

38

Somme de deux sous-espaces vectoriels

39

40

---

41 Quand on connaît des parties génératrices de F et G, est-il plus facile de connaître une partie génératrice de $F + G$ ou une partie génératrice de $F \cap G$?

42

43

44

---

45 Par analyse-synthèse.

46

47

48

49

---

50 **2)** S'appuyer sur le résultat de la question **a)**.

51
