Applications linéaires (je sais faire)

1 Applications linéaires, équations linéaires

✎ Je sais vérifier qu'une application est linéaire et je sais définir les notions de forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme et automorphisme.

1 Donner sans preuve un grand nombre, autant que possible, d'exemples d'applications linéaires ultra-classiques.

2 Montrer que l'application $f \longmapsto \int_0^1 f'\big(t^2+1\big)\,\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ en l'écrivant comme une composée d'applications linéaires usuelles.

✎ Je sais définir l'image et le noyau d'une application linéaire f et les utiliser pour caractériser sa surjectivité ou son injectivité. Je sais écrire $\mathrm{Im}\,f$ comme un Vect.

3 On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Décrire $\mathrm{Im}\,f$ de deux manières :

1) en en exhibant une base.

2) en déterminant une ou plusieurs équations qui la caractérisent.

4

1) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. Comparer $\mathrm{Ker}\,f^p$ et $\mathrm{Ker}\,f^q$, puis $\mathrm{Im}\,f^p$ et $\mathrm{Im}\,f^q$ pour tous $p,q \in \mathbb{N}$ pour lesquels : $p \leqslant q$.

2) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f,g \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que f et g commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}\,g$ et $\mathrm{Im}\,g$ sont stables par f.

3) Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Interpréter l'égalité : $g \circ f = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$ en termes de noyau et d'image.

5 On note $(\varphi_0,\ldots,\varphi_n)$ la famille des formes coordonnées de $\mathbb{K}_n[X]$ associées à la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi_k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker}\,\varphi_0 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_k$.

✎ Je sais définir l'application linéaire associée à une matrice A sans me tromper sur ses ensembles de départ et d'arrivée. Je sais interpréter ses lignes et ses colonnes en termes d'image et de noyau et caractériser l'inversibilité de A en termes de bijectivité.

6 Trouver de tête, par simple contemplation, deux vecteurs linéairement indépendants du noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7 Montrer, en écrivant le moins possible — peut-être de tête ? — que l'application $(x,y) \longmapsto (x+3y, 2x+7y)$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa réciproque.

✎ Je sais décrire et interpréter géométriquement la structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

✎ Je sais que les espaces vectoriels de dimension finie sont caractérisés par leur dimension à isomorphisme près.

8 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$. De quelle manière peut-on définir un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E ?

9 Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1) On suppose $(x_1, \ldots, x_n)$ libre et f injective. Montrer que la famille $\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)$ est libre.

2) On suppose $(x_1, \ldots, x_n)$ génératrice de E et f surjective. Montrer que la famille $\big(f(x_1), \ldots, f(x_n)\big)$ engendre F.

✎ Je connais la dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ lorsque E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

✎ Je sais que $\mathscr{L}(E)$ est un anneau pour des lois bien choisies.

10 Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On fait l'hypothèse que : $f^3 = f^2 - f + \mathrm{Id}_E$ et que la famille $\mathscr{B} = \big(\mathrm{Id}_E, f, f^2\big)$ est libre dans $\mathscr{L}(E)$. On pose : $A = \mathrm{Vect}\big(f^k\big)_{k \in \mathbb{N}}$. On ne manquera pas d'observer que : $X^3 - X^2 + X - 1 = (X-1)\big(X^2+1\big)$.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Id}_E\big)$ et $\mathrm{Ker}\big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)$ sont supplémentaires dans E.

2) Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de A.

3) Calculer les coordonnées de f^{2n} dans $\mathscr{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

✎ Je sais énoncer proprement le théorème de détermination d'une application linéaire sur une base et le théorème analogue de détermination d'une application linéaire sur une somme directe.

11 On note $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et f l'unique forme linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$: $f(E_{ij}) = \delta_{ij}$. Calculer $f(M)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

12 On note φ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ défini pour toute fonction paire p de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi(p) = 2p$ et pour toute fonction impaire i de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi(i) = i$.

1) Justifier la bonne définition de φ.

2) Calculer $\varphi(\exp)$.

13 Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. On note (e_1, e_2, e_3) l'une de ses bases et f l'unique endomorphisme de E défini par : $f(e_1) = e_1 + e_3$, $f(e_2) = e_1$ et $f(e_3) = e_1 - e_3$. Déterminer le noyau et l'image de f.

2 Un lien étroit entre le noyau et l'image

✎ Je sais définir le rang d'une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ de rang fini et je sais caractériser les cas d'égalité : $\mathrm{rg}(f) = \dim E$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim F$.

✎ Je sais que sous une certaine hypothèse essentielle, une application linéaire est injective si et seulement si elle est surjective.

14 On note φ l'endomorphisme $P \longmapsto X^2P'' + P'(1)X - P(2)$ sur $\mathbb{R}[X]$.

1) Montrer que $\varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

✎ Je sais énoncer la forme géométrique du théorème du rang et le théorème du rang lui-même.

15 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Le noyau et l'image de u sont-ils supplémentaires dans E ?

16 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $i, j \in \mathbb{N}$. On suppose dans cette question que : $f^{i+j} = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Montrer que : $\operatorname{rg}\left(f^i\right) + \operatorname{rg}\left(f^j\right) \leqslant \dim E$.

✎ Je sais définir — de deux manières — le rang d'une matrice et caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée par son rang. Je sais relier la notion de rang d'une matrice à celle de rang d'une famille de vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

✎ Je sais que les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes préservent le rang et je sais exploiter l'algorithme du pivot pour calculer le rang d'une matrice.

17 Calculer le rang des $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 8 & -7 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

18 Déterminer DE TÊTE une base du noyau et une base de l'image de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3 Formes linéaires et hyperplans

✎ Je sais qu'en dimension finie, les formes coordonnées dans une base donnée forment une base de l'espace vectoriel des formes linéaires.

19 Quelle est la forme générale des formes linéaires de $\mathbb{K}^n$ et pourquoi ?

✎ Je sais définir les hyperplans grâce à la notion de forme linéaire et je sais les caractériser géométriquement, notamment en dimension finie.

20 Déterminer la dimension de l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont la somme des coefficients est nulle :

1) sans en exhiber une base.

2) en exhibant une base.

✎ Je sais ce qu'on peut dire de l'intersection de r hyperplans d'un espace vectoriel de dimension finie et je sais combien d'hyperplans il est suffisant d'intersecter pour obtenir un sous-espace vectoriel donné de dimension d.

4 Projecteurs, symétries et au-delà

✎ Je sais définir géométriquement et caractériser algébriquement les notions de projection et de symétrie. Je sais représenter graphiquement ces notions et j'ai conscience que tout ce qu'il faut savoir à leur sujet se voit sur un dessin. Je sais lire géométriquement le noyau, l'image et l'ensemble des points fixes d'un projecteur ou d'une symétrie.

21 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E et $x \in E$. On note p la projection de E sur F de direction G et s la symétrie de E par rapport à F de direction G. Exprimer la décomposition de x selon F et G en fonction de x et $p(x)$, puis en fonction de x et $s(x)$.

22 Déterminer une expression explicite de la projection de $\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big(X^2+1\big)$.

23 Déterminer une expression explicite de la symétrie de $\mathbb{R}^3$ par rapport à $\Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \quad x = y\Big\}$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big((0,1,2)\big)$.

24 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note p la projection de E sur F parallèlement à G.

1) Montrer que l'ensemble $\mathscr{U} = \Big\{u \in \mathscr{L}(E) \mid \quad up = pu = p\Big\}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{L}(E)$. On note U sa direction.
2) Déterminer $u|_F$ pour tout $u \in U$ et montrer que G est stable par u.
3) **(Difficile)** Montrer que : $\dim U = (\dim G)^2$.

✎ Je sais définir la somme $F_1 + \ldots + F_p$ des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ et construire une partie génératrice de $F_1 + \ldots + F_p$.

✎ Je sais définir et caractériser le fait que les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ sont en somme directe. Je sais construire une base de $F_1 \oplus \ldots \oplus F_p$ et calculer sa dimension lorsque $F_1, \ldots, F_p$ sont de dimension finie.

25 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p, q et r trois projecteurs de E.

1) Montrer que si $p+q$ est un projecteur, alors : $pq = qp = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
2) On suppose que : $p+q+r = \mathrm{Id}_E$. Montrer que : $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q \oplus \mathrm{Im}\, r$ et $pq = qp = qr = rq = rp = pr = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

26 **(Difficile)** On pose : $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on note, pour tout $k \in \{0,1,2\}$, E_k l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ pour lesquelles pour tout $z \in \mathbb{C}$: $f(\mathrm{j}z) = \mathrm{j}^k f(z)$. On admet que E_0, E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$.

1) Montrer que E_0, E_1 et E_2 sont en somme directe.
2) Montrer que : $\mathbb{C}^{\mathbb{C}} = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$.

5 CORRECTION DES EXERCICES

1

- **Espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$:** Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application linéaire $X \overset{\widehat{A}}{\longmapsto} AX$ canoniquement associée à A est linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
- **Espaces vectoriels $\mathscr{M}_{n,p}(K)$:** L'application $A \longmapsto \widehat{A}$ qui associe à toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ son application linéaire canoniquement associée est linéaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathscr{L}\big(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n\big)$. La trace est une forme linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- **Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$:** Pour tout $A \in \mathbb{K}[X]$, la dérivation $P \longmapsto P'$, la multiplication $P \longmapsto AP$ et la composition À DROITE $P \longmapsto P \circ A$ sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, l'évaluation $P \longmapsto P(x)$ est une forme linéaire de $\mathbb{K}[X]$.
- **Espace vectoriel $\mathbb{R}^\mathbb{R}$:** La dérivation $f \longmapsto f'$ est linéaire de $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Pour toute fonction $g \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$, la multiplication $f \longmapsto fg$ et la composition À DROITE $f \longmapsto f \circ g$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Pour tous $x \in \mathbb{R}$, l'évaluation $f \longmapsto f(x)$ est une forme linéaire de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, l'application $f \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est une forme linéaire de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
- **Espace vectoriel $\mathbb{R}^\mathbb{N}$:** Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante l'extraction $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$. L'application $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est une forme linéaire de l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.
- **Exemples issus de la théorie :** Les formes coordonnées associées à une base, les homothéties, les projections et les symétries, l'application $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ de $\mathbb{K}^n$ dans E qu'on peut associer à toute base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E, l'application $u \longmapsto u|_F$ d'une application à un sous-espace vectoriel F.

---

2 Notons α l'application linéaire de dérivation $f \longmapsto f'$ de $\mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dans $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, β l'endomorphisme de composition $f \longmapsto f \circ \big(t \longmapsto t^2+1\big)$, γ l'endomorphisme de multiplication $f \longmapsto f \times \exp$ et enfin δ la forme linéaire $f \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. L'application étudiée n'est autre que la composée $\delta \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$, linéaire à ce titre.

3

1) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\Big((1,1,1),(2,1,0),(1,0,-1)\Big)$, or : $(1,0,-1) = (2,1,0) - (1,1,1)$ alors que les vecteurs $(1,1,1)$ et $(2,1,0)$ sont non colinéaires, donc la famille $\big((1,1,1),(2,1,0)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}\, f$.

2) Pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$:

$$(a,b,c) \in \mathrm{Im}\, f \iff \exists\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z) = (a,b,c) \iff \exists\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\quad \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & a \\ x & + & y & & & = & b \\ x & & & - & z & = & c \end{array}\right.$$

$$\iff \exists\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\quad \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & 2y & + & z & = & a & \\ x & + & y & & & = & b & \\ 2x & + & 2y & & & = & a+c & \quad L_3 \leftarrow L_1 + L_3 \end{array}\right.$$

$$\iff \exists\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\quad \left\{\begin{array}{cccccccl} x & + & 2y & + & z & = & a & \\ x & + & y & & & = & b & \\ & & & & 0 & = & a-2b+c & \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}\right. \iff a - 2b + c = 0.$$

Conclusion : $\mathrm{Im}\, f = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ \big|\ x - 2y + z = 0\Big\}$.

4

1) Noyaux emboîtés : Qui implique qui sachant que : $p \leqslant q$?

$$f^p(x) = 0_E \implies f^q(x) = 0_E \qquad \text{ou bien :} \qquad f^q(x) = 0_E \implies f^p(x) = 0_E \qquad ?$$

Montrons que : $\mathrm{Ker}\, f^p \subset \mathrm{Ker}\, f^q$. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}\, f^p$: $f^q \overset{p \leqslant q}{=} f^{q-p}\big(f^p(x)\big) = f^{q-p}(0_E) = 0_E$, donc : $x \in \mathrm{Ker}\, f^q$.

Images emboîtées : Qui implique qui sachant que : $p \leqslant q$?

$$y = f^p(\text{machin}) \implies y = f^q(\text{truc}) \qquad \text{ou bien :} \qquad y = f^q(\text{machin}) \implies y = f^p(\text{truc}) \qquad ?$$

Montrons que : $\mathrm{Im}\, f^q \subset \mathrm{Im}\, f^p$. Soit $y \in \mathrm{Im}\, f^q$, disons : $y = f^q(x)$ pour un certain $x \in E$. Aussitôt : $y \overset{p \leqslant q}{=} f^p\big(f^{q-p}(x)\big) \in \mathrm{Im}\, f^p$.

2) Montrons que $\mathrm{Ker}\, g$ est stable par f. Pour tout $x \in \mathrm{Ker}\, g$: $g\big(f(x)\big) = f\big(g(x)\big) = f(0_E) = 0_E$ car f et g commutent, donc : $f(x) \in \mathrm{Ker}\, g$.

Montrons que $\mathrm{Im}\, g$ est stable par f. Pour tout $y \in \mathrm{Im}\, g$, disons : $y = g(x)$ pour un certain $x \in E$, sachant que f et g commutent : $f(y) = f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) \in \mathrm{Im}\, g$.

3) $$g \circ f = 0_{L(E,G)} \iff \forall x \in E,\quad g\big(f(x)\big) = 0_G \iff \forall y \in \mathrm{Im}\, f,\quad g(y) = 0_G \iff \mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g.$$

---

5 Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, φ_k est l'application qui associe à tout polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ son coefficient de degré k, donc :
$$\mathrm{Ker}\,\varphi_k = \mathrm{Vect}\big(1,\ldots,X^{k-1},X^{k+1},X^n\big) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Ker}\,\varphi_0 \cap \ldots \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_k = \mathrm{Vect}\big(X^{k+1},\ldots,X^n\big).$$

---

6 En notant A la matrice étudiée et C_1, C_2, C_3, C_4 ses colonnes : $C_3 = 2C_1 + C_2$ et $C_4 = C_1 + C_2$, donc : $2C_1 + C_2 - C_3 = 0$ et $C_1 + C_2 - C_4 = 0$, donc : $A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, ce qui montre que les vecteurs $(2,1,-1,0)$ et $(1,1,0,-1)$ appartiennent à $\mathrm{Ker}\, A$.

---

7 L'application proposée, disons f, est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Il en découle que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et que sa réciproque est l'application $(x,y) \longmapsto (7x - 3y, -2x + y)$.

---

8 En notant $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, l'application $(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E.

9

1) Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$. On suppose que : $\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) = 0_F$. Aussitôt : $f\big(\lambda_1x_1 + \ldots + \lambda_nx_n\big) = 0_F$, donc : $\lambda_1x_1 + \ldots + \lambda_nx_n \in \mathrm{Ker}\, f$, or : $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ par injectivité de f, donc : $\lambda_1x_1 + \ldots + \lambda_nx_n = 0_E$. Il en découle par liberté de la famille $(x_1,\ldots,x_n)$ que : $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

2) Soit $y \in F$. Par surjectivité de f : $y = f(x)$ pour un certain $x \in E$, puis comme $(x_1,\ldots,x_n)$ engendre E : $x = \lambda_1x_1 + \ldots + \lambda_nx_n$ pour certains $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{K}$. Il en découle que y est combinaison linéaire de $f(x_1),\ldots,f(x_n)$ car : $y = f(x) = f\big(\lambda_1x_1 + \ldots + \lambda_nx_n\big) = \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$.

---

10 Nous noterons Π le polynôme $(X-1)\big(X^2+1\big)$. Remarque préliminaire $\bigstar$:
$$\Pi(f) = \big(f - \mathrm{Id}_E\big) \circ \big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big) = \big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big) \circ \big(f - \mathrm{Id}_E\big) = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

1) Soit $x \in E$.

- **Analyse :** Soient $a \in \mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Id}_E\big)$ et $b \in \mathrm{Ker}\big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)$. On suppose que : $x = a + b$. Composons par f et f^2 : $f(x) = f(a) + f(b) = a + f(b)$ et $f^2(x) = f^2(a) + f^2(b) = a + f^2(b)$. Ainsi, par définition de b : $f^2(x) + x = 2a + \big(f^2(b) + b\big) = 2a$, donc : $a = \dfrac{x + f^2(x)}{2}$. A fortiori : $b = x - a = \dfrac{x - f^2(x)}{2}$.
- **Synthèse :** On pose : $a = \dfrac{x + f^2(x)}{2} = \dfrac{1}{2}\big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)(x)$ et $b = \dfrac{x - f^2(x)}{2} = \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{Id}_E - f\big)\big(\mathrm{Id}_E + f\big)(x)$. Très clairement : $a + b = x$. Ensuite, on déduit de la relation $\bigstar$ que : $\big(f - \mathrm{Id}_E\big)(a) = 0_E$ et $\big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)(b) = 0_E$, i.e. que : $a \in \mathrm{Ker}\big(f - \mathrm{Id}_E\big)$ et $b \in \mathrm{Ker}\big(f^2 + \mathrm{Id}_E\big)$ et c'est fini.

2) Nous devons seulement montrer que la famille $\big(\mathrm{Id}_E, f, f^2\big)$ engendre A. L'inclusion : $\mathrm{Vect}\big(\mathrm{Id}_E, f, f^2\big) \subset A$ est claire. Inversement, tout élément de A est un polynôme en f, disons $P(f)$ pour un certain $P \in \mathbb{R}[X]$. Or la division euclidienne de P par Π s'écrit : $P = \Pi Q + aX^2 + bX + c$ pour certains $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a,b,c \in \mathbb{R}$, donc :
$$P(f) = Q(f) \circ \Pi(f) + af^2 + bf + c\mathrm{Id}_E = af^2 + bf + c\mathrm{Id}_E \in \mathrm{Vect}\big(\mathrm{Id}_E, f, f^2\big).$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. La division euclidienne de X^{2n} par $\Pi = (X-1)(X-\mathrm{i})(X+\mathrm{i})$ s'écrit : $X^{2n} = \Pi Q + aX^2 + bX + c$ pour certains $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $a,b,c \in \mathbb{R}$. Évaluons en 1 et i : $1 = a + b + c$ et $(-1)^n = -a + \mathrm{i}b + c$. La deuxième équation, complexe, nous gratifie de deux équations réelles : $(-1)^n = -a + c$ et $b = 0$. Après calcul : $a = \dfrac{1 - (-1)^n}{2}$ et $c = \dfrac{1 + (-1)^n}{2}$.

Évaluons maintenant la relation polynomiale ainsi déterminée en f : $f^{2n} = \dfrac{1 - (-1)^n}{2} f^2 + \dfrac{1 + (-1)^n}{2} \mathrm{Id}_E$. Les coordonnées de f^{2n} dans la base $\big(\mathrm{Id}_E, f, f^2\big)$ sont donc $\left(\dfrac{1 + (-1)^n}{2}\,,\ 0\,,\ \dfrac{1 - (-1)^n}{2}\right)$.

---

11 Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $M = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij} E_{ij}$, donc par linéarité : $f(M) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij} f(E_{ij}) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \delta_{ij} m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{kk} = \mathrm{tr}(M)$.
Ainsi, f n'est autre que l'application trace !

---

12 On note φ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ défini pour toute fonction paire p de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi(p) = 2p$ et pour toute fonction impaire i de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $\varphi(i) = i$.

1) L'énoncé définit bien une (et une seule) application linéaire car le sous-espace vectoriel $\mathscr{P}$ des fonctions paires et celui $\mathscr{I}$ des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{I}$. La donnée de φ sur ces sous-espaces **ET** sa linéarité caractérisent alors φ sans incohérence et sans ambiguïté.

2) La décomposition de exp selon $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ est tout simplement celle-ci : $\exp = \mathrm{ch} + \mathrm{sh}$ avec : $\mathrm{ch} \in \mathscr{P}$ et $\mathrm{sh} \in \mathscr{I}$. Par définition de φ, du coup : $\varphi(\exp) = \varphi(\mathrm{ch}) + \varphi(\mathrm{sh}) = 2\mathrm{ch} + \mathrm{sh} = \left(x \longmapsto \dfrac{3\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)$.

---

13 Pour tout $v \in E$ de coordonnées (x, y, z) dans (e_1, e_2, e_3) :

$$f(v) = xf(e_1) + yf(e_2) + zf(e_3) = x(e_1 + e_3) + ye_1 + z(e_1 - e_3) = (x + y + z)e_1 + (x - z)e_3,$$

donc par liberté de (e_1, e_2, e_3) :

$$v \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(v) = 0_E \iff x + y + z = 0 \quad \text{et} \quad x - z = 0 \iff z = x \quad \text{et} \quad y = -2x.$$

Conclusion : $\mathrm{Ker}\, f = \left\{ xe_1 - 2xe_2 + xe_3 \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3)$.

Enfin : $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), f(e_2), f(e_3)\big) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_1, e_1 - e_3) = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$.

14

1) Parce que $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie et parce que $\varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}$ est un **ENDO**morphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, il nous suffit de montrer que $\varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}$ est injectif pour montrer que c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Cela dit, en vue de la question **2)**, montrons carrément que φ est injectif sur $\mathbb{R}[X]$ tout entier, i.e. que : $\mathrm{Ker}\, \varphi = \{0\}$. Soit $P \in \mathrm{Ker}\, \varphi$. Aussitôt : $X^2 P'' = -P'(1)X + P(2)$, donc $X^2 P''$ est affine. Pour une raison de degré, il en découle que : $P'' = 0$, i.e. que P lui-même est affine, disons : $P = aX + b$ pour certains $a, b \in \mathbb{R}$. L'équation étudiée devient : $aX - (2a + b) = 0$, puis : $a = b = 0$, donc enfin : $P = 0$.

2) Dans la question **1)**, nous n'avons pas eu besoin de mettre les mains dans le cambouis pour prouver la surjectivité de $\varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}$, un argument de dimension a suffi. Impossible cette fois sur $\mathbb{R}[X]$ tout entier, qui est de dimension infinie !

Nous avons en tout cas déjà montré que φ est injective sur $\mathbb{R}[X]$ en **1)**. Pour la surjectivité, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Alors : $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ où n désigne le degré de Q si P est non nul et 0 sinon. Ainsi, d'après **1)** : $Q = \varphi|_{\mathbb{R}_n[X]}(P)$ pour un certain $P \in \mathbb{R}[X]$, donc Q possède comme voulu un antécédent par φ. Conclusion : φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

---

15 Bah non ! Le théorème du rang énonce que : $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, u + \dim \mathrm{Im}\, u$, c'est tout. D'après la caractérisation de la supplémentarité en dimension finie, le noyau et l'image de u seraient supplémentaires si on savait par ailleurs qu'ils sont en somme directe : $\mathrm{Ker}\, u \cap \mathrm{Im} = \{0_E\}$ ou bien qu'ils recouvrent E par somme : $E = \mathrm{Ker}\, u + \mathrm{Im}\, u$, ce qui est faux en général. Au fond, ce que le théorème du rang montre, c'est que le noyau et l'image de u sont « à moitié supplémentaires dans E », ils réalisent la moitié du programme requis pour être vraiment supplémentaires. C'est très bien, mais pas suffisant.

---

16 L'égalité : $f^{i+j} = 0_{\mathscr{L}(E)}$ signifie ceci en termes de noyau et d'image : $\mathrm{Im}\, f^i \subset \mathrm{Ker}\, f^j$.
Il en découle que : $\mathrm{rg}\big(f^i\big) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\, f^j$, puis grâce au théorème du rang, que : $\mathrm{rg}\big(f^i\big) \leqslant \dim E - \mathrm{rg}\big(f^j\big)$.

17

- **Première matrice :** $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -4 & 8 & -7 \\ 4 & 5 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2.$

- **Deuxième matrice :** Pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a \\ 0 & 2a & 1 & -1 \end{pmatrix} \ L_4 \leftarrow 2L_1 - L_4 \qquad = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 2a & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-a \\ 2a & 1 & 2a+1 \end{pmatrix} \ C_3 \leftarrow C_1 - C_3$$

$$= 2 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 1 & 2a+1 \end{pmatrix} = 2 + \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1-a \\ 0 & 3a \end{pmatrix} \ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \qquad = 3 + \mathrm{rg}(3a) = \begin{cases} 4 & \text{si : } a \neq 0 \\ 3 & \text{si : } a = 0. \end{cases}$$

---

18 Notons A la matrice étudiée et C_1, C_2, C_3 ses colonnes. Très clairement : $C_3 = C_1 + C_2$ alors que C_1 et C_2 sont non colinéaires. Il en découle d'abord que A est de rang 2, donc : $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}(C_1, C_2)$ et $\mathrm{Ker}\, A$ est de dimension 1 d'après le théorème du rang. Ensuite, comme : $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = C_1 + C_2 - C_3 = 0$, $\mathrm{Ker}\, A$ contient $(1,1,-1)$, donc : $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Vect}\big((1,1,-1)\big)$.

---

19 En notant $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $\left(e_1^\star, \ldots, e_n^\star\right)$ la famille des formes coordonnées associées, nous savons que $\left(e_1^\star, \ldots, e_n^\star\right)$ est une base du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathscr{L}\big(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}\big)$ des formes linéaires de $\mathbb{K}^n$. Les formes linéaires de $\mathbb{K}^n$ sont ainsi exactements les combinaisons linéaires de $e_1^\star, \ldots, e_n^\star$, i.e. des applications $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto x_i$, i décrivant $[\![1, n]\!]$. Conclusion : les formes linéaires de $\mathbb{K}^n$ sont exactement les applications $(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, $a_1, \ldots, a_n$ décrivant $\mathbb{K}$. On peut aussi les représenter matriciellement en disant que ce sont exactement les applications linéaires canoniquement associées aux matrices lignes de $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. En effet, pour tous $A = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^n$: $AX = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$.

---

20 Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble étudié.

1) Notons ensuite σ l'application « somme des coefficients » sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Il n'est pas difficile de montrer à la main que σ est linéaire. On peut aussi préférer faire son malin ou sa maligne et jongler avec les formes coordonnées de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ associées à sa base canonique, à savoir les applications $M \overset{\varphi_{ij}}{\longmapsto} m_{ij}$, i et j décrivant $[\![1, n]\!]$. L'égalité : $\sigma = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \varphi_{ij}$ montre que σ est linéaire en tant que combinaison linéaire d'applications qui le sont.

   Bref, σ est une forme linéaire non nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, donc son noyau $\mathscr{S}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ — de dimension $n^2 - 1$.

2) Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{ij} = 0 \iff m_{nn} = -\sum_{(i,j) \neq (n,n)} m_{ij}$ — système échelonné ! — donc en notant $(E_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathscr{S} = \mathrm{Vect}\big(E_{ij} - E_{nn}\big)_{(i,j) \neq (n,n)}$. Cette égalité montre que $\mathscr{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et nous en fournit une famille génératrice dont il n'est pas trop dur de se convaincre qu'elle est libre. Conclusion : $\dim \mathscr{S} = n^2 - 1$.

---

21 C'est du cours, mais qu'il faut savoir retrouver sur un dessin — de tête ! — et surtout pas apprendre par cœur. Tout simplement : $x = \underbrace{p(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p(x)}_{\in G} = \underbrace{\frac{x + s(x)}{2}}_{\in F} + \underbrace{\frac{x - s(x)}{2}}_{\in G}$.

22 Il s'agit surtout de montrer que $\mathbb{R}_1[X]$ et $\mathrm{Vect}\big(X^2 + 1\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$ et de déterminer explicitement la décomposition d'un vecteur quelconque associée. Le calcul du projeté cherché en découlera trivialement.

On peut ici raisonner en termes de base — mais d'autres techniques sont envisageables. La famille $\big(1, X, X^2 + 1\big)$ est échelonnée en degré donc libre, et c'est en fait une base de $\mathbb{R}_2[X]$ car elle est composée de $3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ vecteurs. Nous savons que dans ces conditions, $\mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$ et $\mathrm{Vect}\big(X^2 + 1\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Ensuite, pour tout $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$: $P = \overbrace{a\big(X^2 + 1\big)}^{\in \mathrm{Vect}(X^2+1)} + \overbrace{(bX + c - a)}^{\in \mathbb{R}_1[X]}$, donc le projeté de P sur $\mathbb{R}_1[X]$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\big(X^2 + 1\big)$ est le vecteur $bX + c - a$.

---

23 Il s'agit surtout de montrer que $F = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \Big| \ x = y\Big\}$ et $G = \mathrm{Vect}\big((0, 1, 2)\big)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_3$ et de déterminer explicitement la décomposition d'un vecteur quelconque associée. Le calcul du symétrique cherché en découlera trivialement. Pour tous $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\left\{\begin{array}{l}(a,b,c)=(x,y,z)+\lambda(0,1,2)\\ (x,y,z)\in F\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl}x & & & & & & & = & a\\ & & y & & & + & \lambda & = & b\\ & & & & z & + & 2\lambda & = & c\\ x & - & y & & & & & = & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl}x & & & & & = & a\\ & y & & + & \lambda & = & b\\ & & z & + & 2\lambda & = & c\\ & & & & \lambda & = & b-a\end{array}\right. \qquad L_4 \leftarrow L_4 - L_1 + L_2$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl}x & = & a\\ y & = & a\\ z & = & 2a-2b+c\\ \lambda & = & b-a.\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_4\\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_4\\ \end{array}$$

La supplémentarité souhaitée est ainsi prouvée. Tout vecteur (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ se décompose d'une et une seule manière comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G : $(a,b,c) = \underbrace{(a,a,2a-2b+c)}_{\in F} + \underbrace{(b-a)(0,1,2)}_{\in G}.$

Le symétrique d'un tel vecteur par rapport à F parallèlement à G vaut alors simplement :

$$(a,a,2a-2b+c)-(b-a)(0,1,2) = (a,2a-b,4a-4b+c).$$

24

1) Posons : $U = \left\{u \in \mathscr{L}(E) \mid \ up = pu = 0_{\mathscr{L}(E)}\right\}$. Il n'est pas dur de vérifier que U est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$. Si on veut briller en société, on peut dire avec détachement, comme si c'était inratable, que U est l'intersection des noyaux des endomorphismes $u \longmapsto up$ et $u \longmapsto pu$ de $\mathscr{L}(E)$.

Remarquons à présent que $\mathscr{U}$ contient Id_E. Ainsi, pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$:

$$u \in \mathscr{U} \iff up = pu = p \iff \left(u - \mathrm{Id}_E\right)p = p\left(u-\mathrm{Id}_E\right) = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff u - \mathrm{Id}_E \in U \iff u \in \mathrm{Id}_E + U,$$

donc : $\mathscr{U} = \mathrm{Id}_E + U$. Ceci prouve que $\mathscr{U}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{L}(E)$ de direction U.

2) Soit $u \in U$. Pour tout $x \in F$, par définition de p : $p(x) = x$, donc : $u(x) = up(x) = 0_E$. Conclusion : $u|_F = 0_{\mathscr{L}(F,E)}$. Ensuite, u et p commutent, donc c'est classique, $G = \mathrm{Ker}\, p$ est stable par u.

3) D'après **2)**, pour tout $u \in U$: $u|_F = 0_{\mathscr{L}(F,E)}$ et $u|_G \in \mathscr{L}(G)$. L'application $u \overset{\varphi}{\longmapsto} u|_G$ est ainsi définie de U dans $\mathscr{L}(G)$ et elle est clairement linéaire. Elle est aussi injective, car pour tout $u \in \mathrm{Ker}\,\varphi$: $u|_G = 0_{\mathscr{L}(G,E)}$, or par ailleurs : $u|_F = 0_{\mathscr{L}(F,E)}$, donc par recollement : $u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Montrons maintenant que φ est surjective de U sur $\mathscr{L}(G)$. Soit $g \in \mathscr{L}(G)$. Notons u l'unique endomorphisme de E défini par : $u|_F = 0_{\mathscr{L}(F,E)}$ et $u|_G = g$. Une telle définition est possible car : $E = F \oplus G$. Je prétends que u appartient à U, montrons-le.

— Pour tout $x \in F$: $up(x) = u(x) = 0_E$ et $pu(x) = p(0_E) = 0_E$, donc : $(up)|_F = (pu)|_F = 0_{\mathscr{L}(F,E)}$.

— Pour tout $x \in G$: $up(x) = u(0_E) = 0_E$ et $pu(x) = pg(x) \overset{g(x)\in G}{=} 0_E$, donc : $(up)|_G = (pu)|_G = 0_{\mathscr{L}(G,E)}$.

Ces deux points montrent par recollement que : $up = pu = 0_{\mathscr{L}(E)}$, i.e. que : $u \in U$, et par construction : $\varphi(u) = u|_G = g$.

Conclusion : φ est un isomorphisme de U sur $\mathscr{L}(G)$, donc : $\dim U = \dim \mathscr{L}(G) = (\dim G)^2$.

25

1) Par hypothèse : $p^2 = p$, $q^2 = q$ et $(p+q)^2 = p+q$, donc après développement : $pq + qp = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Composons ce résultat par p à gauche d'une part et à droite d'autre part. Cela donne : $p^2q + pqp = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $pqp + qp^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, puis : $pq = -pqp = qp$. En reprenant la relation : $p + qp = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on obtient enfin comme voulu l'égalité : $pq = qp = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

2) Plusieurs étapes.

- Montrons que : $E = \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q + \mathrm{Im}\, r$. Il nous suffit de démontrer l'inclusion : $E \subset \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q + \mathrm{Im}\, r$. Or tout simplement, pour tout $x \in E$: $x = \mathrm{Id}_E(x) = p(x) + q(x) + r(x) \in \mathrm{Im}\, p + \mathrm{Im}\, q + \mathrm{Im}\, r$.
- Montrons que : $pq = qp = qr = rq = rp = pr = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Il nous suffit de montrer que : $pq = 0_{\mathscr{L}(E)}$ car l'énoncé donne des rôles parfaitement symétriques à p, q et r. Or r étant un projecteur, $\mathrm{Id}_E - r = p + q$ en est aussi. C'est clair géométriquement, non ? Et sinon : $\left(\mathrm{Id}_E - r\right)^2 = \mathrm{Id}_E^2 - 2r + r^2 = \mathrm{Id}_E - 2r + r = \mathrm{Id}_E - r$. Ainsi d'après **1)**, comme voulu : $pq = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

- Montrons que $\operatorname{Im} p$, $\operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Im} r$ sont en somme directe. Soient $y_p \in \operatorname{Im} p$, $y_q \in \operatorname{Im} q$ et $y_r \in \operatorname{Im} r$, disons : $y_p = p(q_p)$, $y_q = q(x_q)$ et $y_r = r(x_r)$ pour certains $x_p, x_q, x_r \in E$. On suppose que : $y_p + y_q + y_r = 0_E$, i.e. que : $p(x_p) + q(x_q) + r(x_r) = 0_E$. Composons par p. D'après le point précédent et sachant que p est un projecteur : $p(x_p) = 0_E$, i.e. : $y_p = 0_E$ et l'on procède de même avec y_q et y_r.

26

1) Soient $f_0 \in E_0$, $f_1 \in E_1$ et $f_2 \in E_2$. On suppose que : $f_0 + f_1 + f_2 = 0 \quad \bigstar_0$, i.e. que : $f_0(z) + f_1(z) + f_2(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. A fortiori, pour tout $z \in \mathbb{C}$: $0 = f_0(\mathrm{j}z) + f_1(\mathrm{j}z) + f_2(\mathrm{j}z) = f_0(z) + \mathrm{j}f_1(z) + \mathrm{j}^2 f_2(z)$, donc : $f_0 + \mathrm{j}f_1 + \mathrm{j}^2 f_2 = 0 \quad \bigstar_1$, et de même, pour tout $z \in \mathbb{C}$:
$0 = f_0\big(\mathrm{j}^2 z\big) + f_1\big(\mathrm{j}^2 z\big) + f_2\big(\mathrm{j}^2 z\big) = f_0(\mathrm{j}z) + \mathrm{j}f_1(\mathrm{j}z) + \mathrm{j}^2 f_2(\mathrm{j}z) = f_0(z) + \mathrm{j}^2 f_1(z) + \mathrm{j}f_2(z)$, i.e. que : $f_0 + \mathrm{j}^2 f_1 + \mathrm{j}f_2 = 0 \quad \bigstar_2$.
Additionnons maintenant les trois relations $\bigstar$ en n'oubliant pas que : $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$. Cela donne : $f_0 = 0$. Il n'est pas difficile d'en déduire alors que : $f_1 = f_2 = 0$.

2) Il suffit bien sûr de montrer l'inclusion : $\mathbb{C}^{\mathbb{C}} \subset E_0 \oplus E_1 \oplus E_2$. Si l'on manque d'idées, une analyse-synthèse s'impose naturellement, mais l'analyse redémontrera le résultat de la question **1)** — que j'ai préféré isoler à des fins pédagogiques.

On a le droit d'avoir quelques idées cela dit. Cet exercice n'évoque-t-il pas la classique supplémentarité de l'ensemble des fonctions paires et de l'ensemble des fonctions impaires ? Oh que si ! Ici, en quelque sorte, on a simplement remplacé 2 par 3, ou encore $\mathbb{U}_2 = \big\{\pm 1\big\}$ par $\mathbb{U}_3 = \big\{1, \mathrm{j}, \overline{\mathrm{j}}\big\}$.

Fixons $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$. La composante f_0 de f selon E_0 est censée ne pas changer quand on la compose par l'application $z \longmapsto \mathrm{j}z$. Pourquoi ne pas noter f_0 la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{3}\Big(f(z) + f(\mathrm{j}z) + f\big(\mathrm{j}^2 z\big)\Big)$? Dans le même état d'esprit, notons f_1 la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{3}\Big(f(z) + \mathrm{j}^2 f(\mathrm{j}z) + \mathrm{j}f\big(\mathrm{j}^2 z\big)\Big)$ et f_2 la fonction $z \longmapsto \dfrac{1}{3}\Big(f(z) + \mathrm{j}f(\mathrm{j}z) + \mathrm{j}^2 f\big(\mathrm{j}^2 z\big)\Big)$. La relation : $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$ montre que : $f = f_0 + f_1 + f_2$. Ensuite, après calcul : $f_0 \in E_0$, $f_1 \in E_1$ et $f_2 \in E_2$.
