Calculs de primitives et d'intégrales (je sais faire)

✎ Je sais qu'on ne dit pas « LA primitive » mais « une primitive ».

✎ Je sais donner instantanément les primitives des fonctions : $x \longmapsto e^x$, $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \neq -1$, $x \longmapsto \sin x$, $x \longmapsto \cos x$, $x \longmapsto \tan x$, $x \longmapsto \operatorname{sh} x$, $x \longmapsto \operatorname{ch} x$, $x \longmapsto \operatorname{th} x$, $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

✎ Je sais que la primitivation est un problème difficile en général — on peut savoir primitiver f et g sans savoir primitiver fg, $\frac{f}{g}$ et $g \circ f$.

1 Calculer une primitive des fonctions : $x \longmapsto \sin(3x+2)$, $x \longmapsto \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $x \longmapsto \frac{1}{\tan x}$ et $x \longmapsto \frac{e^x}{e^x+1}$.

✎ Je sais calculer les primitives des fonctions $x \longmapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ pour lesquelles : $b^2-4ac<0$.

2 Calculer une primitive des fonctions : $x \longmapsto \frac{1}{x^2+4}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x^2+x+1}$.

✎ Je sais calculer les primitives des fonctions $x \longmapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \longmapsto e^{ax}\sin(bx)$.

3 Calculer une primitive de la fonction : $x \longmapsto e^{2x}\sin(5x)$.

✎ Je sais calculer les primitives des fonctions du genre : $x \longmapsto \sin^4 x$, $x \longmapsto \sin^3 x\cos^5 x$, $x \longmapsto \sin^2 x\cos(2x)\ldots$

4 Calculer une primitive de la fonction : $x \longmapsto \sin^4 x\cos^2 x$.

✎ Je sais calculer les primitives d'une fraction rationnelle.

5 Calculer une primitive de la fonction : $x \longmapsto \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$.

✎ Je sais énoncer les deux formes du théorème fondamental du calcul intégral.

6 Dériver les fonctions : $x \overset{f}{\longmapsto} \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{t+1}\,dt$, $x \overset{g}{\longmapsto} \displaystyle\int_0^{e^x} \sin\sqrt{t}\,dt$ et $x \overset{h}{\longmapsto} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$.

✎ Je sais utiliser la notation « $\displaystyle\int f(x)\,dx$ » sans bornes.

✎ Je sais définir la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

✎ Je sais effectuer rapidement une intégration par parties, y compris pour des intégrales sans bornes.

7 Calculer une primitive des fonctions : $x \longmapsto x\ln x$ et $x \longmapsto x^2 \mathrm{Arctan}\, x$.

✎ Je sais énoncer la formule de changement de variable et la mettre en œuvre rapidement, y compris pour des intégrales sans bornes.

8 Effectuer sucessivement dans l'intégrale : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin t}{t^2+t+1}\,dt$ les changements de variable suivants : $x = t^2$, puis : $u = \ln x$.

1 CORRECTION DES EXERCICES

1 $\displaystyle\int \sin(3x+2)\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(3x+2)}{3}$, $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sin\sqrt{x}$, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\tan x} = \ln|\sin x|$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \ln\left(\mathrm{e}^x+1\right)$.

---

2 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}\frac{x}{2}$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

---

3 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}\sin(5x)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{29}\big(2\sin(5x)-5\cos(5x)\big)$.

---

4 $\displaystyle\int \sin^4 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{16} - \frac{\sin(2x)}{64} - \frac{\sin(4x)}{64} + \frac{\sin(6x)}{192}$.

---

5 Après calcul de la décomposition en éléments simples : $\displaystyle\frac{X}{\left(X^2+1\right)(X-1)} = 0 + \frac{1-X}{2\left(X^2+1\right)} + \frac{1}{2(X-1)}$.

Par conséquent : $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\left(x^2+1\right)(x-1)} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x - \frac{1}{4}\ln\left(x^2+1\right) + \frac{\ln|x-1|}{2}$.

---

6 Pour tout $x \in\,]-1,+\infty[$: $\displaystyle f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \mathrm{e}^x \times \sin\sqrt{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^x \sin \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $\displaystyle h'(x) = 2\times\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} - \frac{\mathrm{e}^x}{x} = \frac{\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x-1\right)}{x}$.

---

7 $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$ et $\displaystyle\int x^2\operatorname{Arctan} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\operatorname{Arctan} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6}\ln\left(x^2+1\right)$.

---

8 $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sin t}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t \overset{x=t^2}{=} \int_1^4 \frac{\sin\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}\times\frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}} \overset{u=\ln x}{=} \int_0^{2\ln 2} \frac{\sin \mathrm{e}^{\frac{u}{2}}}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{\frac{u}{2}}+1}\times\frac{1}{2\mathrm{e}^{\frac{u}{2}}}\times \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{2\ln 2}\frac{\mathrm{e}^{\frac{u}{2}}\sin \mathrm{e}^{\frac{u}{2}}}{\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{\frac{u}{2}}+1}\,\mathrm{d}u$.
