CONTINUITÉ (JE SAIS FAIRE)

1 DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

✎ Je sais écrire sans délai la définition quantifiée de la continuité en un point.

✎ Je sais étudier la continuité d'une fonction et la prolonger par continuité aux bornes le cas échéant.

La continuité d'une composée $g \circ f$ dans laquelle g n'est pas continue sur $\mathbb{R}$ tout entier mérite d'être justifiée soigneusement à l'aide de l'expression « à valeurs dans ». Au contraire, la continuité d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de fonctions continues n'a pas besoin d'être justifiée en détail.

1 Étudier la continuité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$ et son éventuel prolongement par continuité aux bornes.

✎ Je sais utiliser correctement la notion de prolongement — par continuité ou non. Je ne parle jamais de prolongement en un point a pour une fonction qui est déjà définie en a.

2 On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ et $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\{x\}}} - \dfrac{\{x\}}{\mathrm{e}} & \text{si : } x \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

✎ Je sais exploiter le sens direct de la caractérisation séquentielle de la continuité. J'ai compris que la continuité est LA propriété qui nous autorise à permuter une fonction et le symbole « limite » : $f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$ lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pour lesquelles pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f\left(1+\dfrac{x}{2}\right) = f(x) + \lambda$.

✎ Je sais exploiter ensemble la caractérisation séquentielle de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et la caractérisation séquentielle de la continuité.

4 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que si $f|_{\mathbb{Q}}$ est paire, f l'est sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2 TROIS THÉORÈMES DE CONTINUITÉ GLOBALE

✎ Je sais énoncer proprement les deux versions du théorème des valeurs intermédiaires ainsi que le TVI strictement monotone. Je sais aussi qu'en général, $f\big([a,b]\big)$ n'est ni $\big[f(a),f(b)\big]$ ni $\big[f(b),f(a)\big]$.

✎ Je sais décrire de façon détaillée l'algorithme de dichotomie grâce auquel on peut calculer une valeur approchée d'un zéro d'une fonction continue.

5 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que : $f(0)=f(1)$. Montrer que pour un certain $c \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$: $f\left(c+\frac{1}{2}\right)=f(c)$.

✎ Je sais énoncer le théorème des bornes atteintes.

6 Pour quelle(s) valeur(s) de $\alpha \in \mathbb{R}$ la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^\alpha(\pi-x)}{\sin x}$ est-elle bornée sur $]0,\pi[$?

7 Soit $f \in \mathscr{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \geqslant 0$: $2f(3x) \leqslant f(x)+f(2x)$. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$: $f(x) \leqslant f(0)$. On n'oubliera pas d'observer que $[0,x]$ est un segment.

✎ Je sais énoncer le théorème de continuité d'une réciproque et les différents liens qui ont été étudiés entre la stricte monotonie, l'injectivité et la continuité.

8 Une fonction continue peut-elle être bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}$? Et de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$?

9 Soit $f \in \mathscr{C}\big([0,1[,\mathbb{R}\big)$ une fonction strictement croissante pour laquelle : $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$. Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=1$.

3 Correction des exercices

1 La fonction $x \longmapsto 1-\mathrm{e}^x$ est continue sur $\mathbb{R}_-^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ tandis que $\sqrt{\cdot}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, $x \longmapsto \sqrt{1-\mathrm{e}^x}$ est donc continue sur $\mathbb{R}_-^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$ l'est enfin sur $\mathbb{R}_-^*$.

Ensuite : $\dfrac{x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}} = \dfrac{\sqrt{-x}}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}}} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \dfrac{0}{\sqrt{1}} = 0$, donc $x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{1-\mathrm{e}^x}}$ est prolongeable par continuité en 0.

---

2 Vous remarquerez bien que nous ne parlerons pas de prolongement dans cet exercice, la fonction étudiée étant déjà définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. La fonction $\{\cdot\}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et ne s'y annule pas, donc f est elle aussi continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

Fixons à présent $n\in\mathbb{Z}$.

— La fonction f est continue en n à droite car : $\lim\limits_{x\to n^+}\{x\} = 0^+$, donc : $f(x) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\{x\}}} - \dfrac{\{x\}}{\mathrm{e}}\right) \underset{x\to n^+}{\longrightarrow} 0 - \dfrac{0}{\mathrm{e}} = f(n)$.

— La fonction f est continue en n à gauche car : $\lim\limits_{x\to n^-}\{x\} = 1$, donc : $f(x) = \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{\{x\}}} - \dfrac{\{x\}}{\mathrm{e}}\right) \underset{x\to n^+}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-\frac{1}{1}} - \dfrac{1}{\mathrm{e}} = f(n)$.

Comme voulu, f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Il n'était pas interdit de remarquer que $\{\cdot\}$, et donc f, sont 1-périodiques. Il était donc suffisant d'étudier la continuité de f en 0, i.e. sa continuité à gauche et à droite en 0. On aurait aussi pu étudier la continuité en 0 à droite et la continuité en 1 à gauche, toujours grâce à la 1-périodicité.

3

- **Analyse :** Soit $f\in\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f\left(1+\dfrac{x}{2}\right) = f(x)+\lambda \quad \bigstar$. Il en découle que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}\right) \overset{\bigstar}{=} f\left(1+\dfrac{x}{2}\right)+\lambda \overset{\bigstar}{=} f(x)+2\lambda$, puis plus généralement par récurrence que pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$: $f\left(\dfrac{x}{2^n}+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{2^k}\right) = f(x)+n\lambda$, ou encore : $f\left(2+\dfrac{x-2}{2^n}\right) = f(x)+n\lambda$ après simplification. Or par continuité de f en 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(2+\dfrac{x-2}{2^n}\right) = f(2)$, donc forcément : $\lambda=0$. En d'autres termes, si : $\lambda\neq 0$, le problème étudié n'a pas de solution. Si au contraire : $\lambda=0$, nous venons de montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f(x)=f(2)$, i.e. que f est constante.
- **Synthèse :** Les fonctions constantes sont bel et bien solutions du problème étudié pour $\lambda=0$.

---

4 Soit $x\in\mathbb{R}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$: $x = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n$ pour une certaine suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aussitôt, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par parité de $f|_{\mathbb{Q}}$: $f(-r_n) = f(r_n)$, donc par continuité de f en x et $-x$:

$$f(-x) = f\Big(\lim_{n\to+\infty}(-r_n)\Big) \underset{\text{en } -x}{\overset{\text{Continuité}}{=}} \lim_{n\to+\infty} f(-r_n) = \lim_{n\to+\infty} f(r_n) \underset{\text{en } x}{\overset{\text{Continuité}}{=}} f\Big(\lim_{n\to+\infty} r_n\Big) = f(x).$$

---

5 La fonction $x \overset{g}{\longmapsto} f\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-f(x)$ est continue sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ et : $g(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right)-f(1) = -g\left(\dfrac{1}{2}\right)$, donc $g(0)$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right)$ n'ont pas le même signe — sauf si l'un est nul. Dans tous les cas, g s'annule sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ d'après le TVI, ce qui est le résultat voulu.

---

6 Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

- $\dfrac{x^\alpha(\pi-x)}{\sin x} = -\dfrac{x^\alpha}{\dfrac{\sin x}{x-\pi}} \underset{x\to\pi}{\longrightarrow} -\dfrac{\pi^\alpha}{\sin'(\pi)} = \pi^\alpha$, donc f est prolongeable par continuité en π par la valeur π^α.
- $\dfrac{x^\alpha(\pi-x)}{\sin x} = x^{\alpha-1}\times\dfrac{\pi-x}{\dfrac{\sin x}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si : } \alpha<1 \\ \pi & \text{si : } \alpha=1 \\ 0 & \text{si : } \alpha>1, \end{cases}$ donc si f est bornée sur $]0,\pi[$: $\alpha\geqslant 1$,

  et dans ce cas, f est prolongeable par continuité en 0 par la valeur 0 ou π.

Toujours dans le cas où : $\alpha \geqslant 1$, maintenant que f est définie et continue sur le **SEGMENT** $[0,\pi]$, elle y est bornée d'après le théorème des bornes atteintes, donc également bornée sur $]0,\pi[$. En résumé, la fonction initiale est bornée sur $]0,\pi[$ si et seulement si : $\alpha \geqslant 1$.

---

7 Soit $x \geqslant 0$. Continue sur le **SEGMENT** $[0,x]$, f y possède un maximum d'après le théorème des bornes atteintes, disons en $a \in [0,x]$. Aussitôt, sachant que $\frac{a}{3}$ et $\frac{2a}{3}$ appartiennent à $[0,x]$: $2f(a) = 2f\left(3\times\frac{a}{3}\right) \leqslant f\left(\frac{a}{3}\right) + f\left(\frac{2a}{3}\right) \leqslant f(a)+f(a)$, donc en fait : $f\left(\frac{a}{3}\right) = f\left(\frac{2a}{3}\right) = f(a)$. On va montrer plus généralement que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(a) = f\left(\frac{a}{3^n}\right)$.

- **Initialisation :** Évidente pour $n=0$.
- **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que : $f(a) = f\left(\frac{a}{3^n}\right)$. Aussitôt, sachant que $\frac{a}{3^{n+1}}$ et $\frac{2a}{3^{n+1}}$ sont dans $[0,x]$:
$$2f(a) \overset{\text{HDR}}{=} 2f\left(\frac{a}{3^n}\right) = 2f\left(3\times\frac{a}{3^{n+1}}\right) \leqslant f\left(\frac{a}{3^{n+1}}\right) + f\left(\frac{2a}{3^{n+1}}\right) \leqslant f(a)+f(a),$$
donc en fait : $f\left(\frac{a}{3^{n+1}}\right) = f\left(\frac{a}{3^{n+1}}\right) = f(a)$.

Tâchons de conclure. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) \leqslant f(a) = f\left(\frac{a}{3^n}\right)$, or par continuité de f en 0 : $\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{a}{3^n}\right) = f(0)$, donc comme voulu : $f(x) \leqslant f(0)$.

8

- Une fonction continue **NE** peut **PAS** être bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}$. Continue injective, une telle fonction serait strictement monotone, donc posséderait une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$ d'après le théorème de la limite monotone. Elle serait donc bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\big[f(0),\ell\big[$ ou $\big]\ell,f(0)\big]$ d'après le TVI strictement monotone, mais donc **PAS** de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto x - \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante par somme, et de limites $-\infty$ en 0 et $+\infty$ en $+\infty$. D'après le TVI strictement monotone, elle est donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

---

9 Strictement croissante de limite $+\infty$ en 1, f est bijective de $[0,1[$ sur $\big[f(0),+\infty\big[$ d'après le TVI strictement monotone, ce qui justifie la bonne définition de f^{-1} ainsi que sa stricte croissance. Le théorème de la limite monotone montre en retour que f^{-1} possède une limite $\ell \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ en $+\infty$. En résumé : $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$ et $\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = \ell$, donc par composition : $\lim_{x\to 1} f^{-1}\big(f(x)\big) = \ell$, et ainsi finalement : $\ell = 1$.
