DÉRIVABILITÉ (JE SAIS FAIRE)

1 DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

✎ Je sais définir la dérivabilité et la classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et je sais relier ces différentes notions de régularité entre elles.

✎ Je sais étudier la dérivabilité d'une fonction en un point problématique en revenant à une limite de taux d'accroissement.

1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note f la fonction $x \longmapsto \begin{cases} (1+x)^\alpha & \text{si : } \quad x \geqslant 0 \\ \operatorname{ch} x & \text{si : } \quad x < 0. \end{cases}$ À quelle condition nécessaire et suffisante simple f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier ?

2 Soit $f \in \mathscr{D}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. On suppose que f ne s'annule pas, que : $f(0) = f(1) = 0$ et que : $f'(0) > 0$. Étudier le signe de $f'(1)$. On commencera par faire un dessin et on n'oubliera pas la définition du nombre dérivé.

✎ Je sais dériver une combinaison linéaire, un produit, un quotient, une composée et une réciproque. Dans le cas d'une réciproque, je sais qu'une certaine condition doit être vérifiée au préalable, que je comprends géométriquement. Je connais la formule de Leibniz.

3 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction dont la dérivée ne s'annule pas et pour laquelle : $f(0) = 0$. On note m le coefficient directeur de la tangente de f en 0.

1) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur son image.

2) Que vaut le coefficient directeur de la tangente de f^{-1} en 0 ?

4 Calculer **RAPIDEMENT**, sans preuve, les dérivées successives des fonctions suivantes :

1) $x \longmapsto x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$. **2)** $x \longmapsto a^x \quad (a > 0)$. **3)** $x \longmapsto \dfrac{1}{x+a} \quad (a \in \mathbb{R})$. **4)** $x \longmapsto x^2 \sin x$.

2 QUELLES INFORMATIONS PEUT-ON TIRER D'UNE DÉRIVÉE ?

✎ Je sais énoncer, avec toutes ses hypothèses, le théorème qui relie les notions d'extremum local et de point critique.

✎ Je sais énoncer, avec toutes leurs hypothèses, le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis. J'ai compris l'intérêt du second — toute information dont on dispose sur f' peut être traduite en une information sur les accroissements de f.

5 Montrer que pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad 1 - \cos x \leqslant x \sin x$.

6 Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

1) On suppose dans un premier temps que les racines de P sont toutes simples. Montrer que $P + \lambda P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$. On pourra s'intéresser à la fonction $x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^{\frac{x}{\lambda}}$.

2) Montrer que $P + \lambda P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$ en toute généralité.

3) Montrer en utilisant astucieusement le résultat de la question **2)** que $P - \lambda^2 P''$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

7 Soient I un intervalle et $f \in \mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$. Montrer proprement par récurrence que si f s'annule en au moins $k+1$ points, alors $f^{(k)}$ s'annule en au moins un point.

✎ Je sais caractériser la monotonie et la monotonie stricte d'une fonction dérivable à l'aide du signe de sa dérivée.

✎ Je sais énoncer la définition de la lipschitzianité et l'inégalité des accroissements finis, et relier la lipschitzianité aux autres propriétés de régularité connues (continuité, dérivabilité, classe $\mathscr{C}^k$).

8 Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. On suppose que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

1) Montrer que f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

2) En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$.

✎ Je sais exploiter l'inégalité des accroissements finis pour montrer que certaines suites récurrentes « $u_{n+1} = f(u_n)$ » convergent.

9 Soit $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On suppose que : $f(\pi) = \pi$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\big|f'(x)\big| \leqslant \dfrac{1}{2}$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pi$.

✎ Je sais énoncer et utiliser le théorème de la limite de la dérivée et le théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^k$. Je ne parle jamais de prolongement en a pour une fonction déjà définie en a.

10 Montrer que la fonction arcsinus n'est pas dérivable en 1 et -1.

11

1) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\mathrm{th}\, x| \leqslant |x|$.

b) En déduire, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $t \longmapsto \mathrm{th}\, t - t$, que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\big|\mathrm{th}\, x - x\big| \leqslant |x|^3$, puis que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{th}\, x - x}{x^2} = 0$.

2) On pose : $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}\, x}$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. On sera sans doute amené à exploiter le résultat de la question **1)** !

3 Correction des exercices

1 La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Qu'en est-il en 0 ? Elle l'est en tout cas à droite avec : $f'_d(0)=\alpha$. Ensuite, pour tout $x<0$: $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x}\underset{x\to 0^-}{\longrightarrow}\operatorname{ch}'_g(0)=\operatorname{ch}'(0)=\operatorname{sh}(0)=0$, donc f est dérivable en 0 à gauche avec : $f'_g(0)=0$. Finalement, f est dérivable en 0 si et seulement si : $\alpha=0$.

---

2 Un rapide dessin devrait vous convaincre que : $f'(1)\leqslant 0$. Montrons-le. Par hypothèse : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)>0$, donc la fonction $x\longmapsto\dfrac{f(x)}{x}$ est strictement positive au voisinage de 0. A fortiori, f elle-même est strictement positive au voisinage de 0. Comme f est continue et ne s'annule pas sur $]0,1[$, le TVI nous garantit que f est strictement positive sur $]0,1[$ tout entier. En retour, pour tout $x\in]0,1[$: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)}{x-1}<0$, donc à la limite : $f'(1)\leqslant 0$.

3

1) Par hypothèse, f' est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'y annule pas, donc a un signe constant d'après le TVI. Il en découle que f est strictement monotone. Continue, elle est donc bijective de $\mathbb{R}$ sur son image d'après le TVI strictement monotone.

2) Comme f' ne s'annule pas, f^{-1} est dérivable sur son ensemble de définition $f(\mathbb{R})$, lequel est un intervalle contenant 0 d'après le TVI. Ensuite, par hypothèse : $m=f'(0)$. On nous demande de calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$. Tout simplement : $\left(f^{-1}\right)'(0)=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}(0)}=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{m}$.

---

4 Dans chaque question, on note f la fonction étudiée et on fixe $n\in\mathbb{N}$. Il s'agit ici d'aller vite.

1) On perd une unité de puissance par dérivation. Pour tout $x>0$: $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$.

2) Cette fois, on dérive une exponentielle, elle reste intacte et $\ln a$ tombe une fois par dérivation. Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f^{(n)}(x)=(\ln a)^n a^x$.

3) Il faut ici impérativement utiliser des puissances négatives et procéder comme en **1)**. Surtout pas de formule « $\left(\dfrac{1}{v}\right)'$ ». Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-a\}$: $f^{(n)}(x)=(-1)(-2)\dots(-n)(x+a)^{-n-1}=\dfrac{(-1)^n n!}{(x+a)^{n+1}}$.

4) Formule de Leibniz ! Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(x^2\right)\sin^{(n-k)}(x)=\binom{n}{0}\times x^2\sin^{(n)}(x)+\binom{n}{1}\times 2x\sin^{(n-1)}(x)+\binom{n}{2}\times 2\overbrace{\sin^{(n-2)}(x)}^{=-\sin^{(n)}(x)}\\&=\left(x^2-n(n-1)\right)\sin^{(n)}(x)+2nx\sin^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

Ainsi, pour n pair : $f^{(n)}(x)=\left(x^2-n(n-1)\right)\times(-1)^{\frac{n}{2}}\sin x+2nx\times(-1)^{\frac{n}{2}+1}\cos x$ et pour n impair :

$$f^{(n)}(x)=\left(x^2-n(n-1)\right)\times(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos x+2nx\times(-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin x.$$

Pour la simplification finale, on peut observer que lorsque on dérive un sinus ou cosinus deux fois, on retombe sur lui au signe près.

---

5 Soit $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. La fonction cosinus est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, donc : $\dfrac{1-\cos x}{0-x}=\cos'(c)=-\sin c$ pour un certain $c\in]0,x[$ d'après le théorème des accroissements finis. Ainsi : $1-\cos x=x\sin c$, or la fonction sinus est croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et : $x\geqslant 0$, donc : $1-\cos x\leqslant x\sin x$.

Cette inégalité est bien sûr triviale pour $x=0$, et pour tout $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right[$: $1-\cos x=1-\cos(-x)\leqslant(-x)\sin(-x)=x\sin x$.

6

1) Notons f la fonction $x\longmapsto P(x)\mathrm{e}^{\frac{x}{\lambda}}$ sur $\mathbb{R}$, n le degré de P et $x_1,\dots,x_n$ les racines réelles de P avec : $x_1<\dots<x_n$. On a pu se donner les racines de P ainsi car P est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $i\in[\![1,n-1]\!]$, f est continue sur $[x_i,x_{i+1}]$, dérivable sur $]x_i,x_{i+1}[$ et : $f(x_i)=f(x_{i+1})$, donc f' s'annule en un certain $x'_i\in]x_i,x_{i+1}[$ d'après le théorème de Rolle. Les inégalités : $x_1<x'_1<x_2<\dots<x_{n-1}<x'_{n-1}<x_n$ montrent que les réels $x'_1,\dots,x'_{n-1}$ sont distincts. En outre, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\dfrac{P(x)+\lambda P'(x)}{\lambda}\mathrm{e}^{\frac{x}{\lambda}}$. Nous avons donc trouvé $n-1$ racines réelles distinctes du polynôme $P+\lambda P'$.

Pour finir, $P+\lambda P'$ est de degré n, il nous manque donc une racine. Or en divisant $P+\lambda P'$ par $(X-x_1')\dots(X-x_{n-1}')$, on obtient un quotient de degré 1 à coefficient réel, qui nous fournit la dernière racine cherchée. Comme voulu, $P+\lambda P'$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

2) On va reprendre en partie la preuve précédente, mais cette fois, les racines de P ne sont plus simples. Notons $x_1,\dots,x_r$ les racines réelles de P et $m_1,\dots,m_r$ leurs multiplicités respectives. Comme P est scindé sur $\mathbb{R}$: $m_1+\dots+m_r=n$. Les multiplicités de $x_1,\dots,x_r$ dans P' valent respectivement $m_1-1,\dots,m_r-1$, donc leurs multiplicités dans $P+\lambda P'$ valent au moins $m_1-1,\dots,m_r-1$. Nous tenons ainsi déjà au moins $(m_1-1)+\dots+(m_r-1)=n-r$ racines de $P+\lambda P'$ comptées avec multiplicité. Le théorème de Rolle nous en fournit $r-1$ autres comme en **1)**, nous connaissons donc au moins $n-1$ racines de $P+\lambda P'$ comptées avec multiplicité. Une dernière racine surgit enfin comme à la fin de la question **1)** et le compte est bon.

3) Appliquons **2)** avec $P+\lambda P'$ à la place de P et $-\lambda$ à la place de λ. Le polynôme $\left(P+\lambda P'\right)-\lambda\left(P+\lambda P'\right)'=P-\lambda^2P''$ est aussitôt scindé sur $\mathbb{R}$.

---

7 Nous allons montrer par récurrence que pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, $f^{(i)}$ s'annule en au moins $k-i+1$ points distincts. Pour $i=k$, cela nous donnera exactement le résultat voulu.

Initialisation : Pour $i=0$, l'assertion à démontrer est l'hypothèse du théorème.

Hérédité : Soit $i\in[\![0,k-1]\!]$. On suppose que $f^{(i)}$ s'annule en au moins $k-i+1$ points $x_1,\dots,x_{k-i+1}$ rangés dans l'ordre : $x_1<\dots<x_{k-i+1}$. Pour tout $j\in[\![1,k-i]\!]$, $f^{(i)}$ est continue sur $[x_j,x_{j+1}]$ et dérivable sur $]x_j,x_{j+1}[$, et par ailleurs : $f^{(i)}(x_j)=f^{(i)}(x_{j+1})=0$. Le théorème de Rolle affirme donc l'existence d'un zéro x_j' de $f^{(i+1)}$ compris strictement entre x_j et x_{j+1}. Nous voilà donc à la tête de $k-i=k-(i+1)+1$ zéros de $f^{(i+1)}$, distincts car : $x_1'<x_2<x_2'<x_3<\dots<x_{k-i}'<x_{k-i+1}$.

8

1) Comme : $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, f' est bornée au voisinage de $+\infty$, disons sur $]A,+\infty[$ pour un certain $A>0$. Continue sur le **SEGMENT** $[0,A]$, f' y est bornée d'après le théorème des bornes atteintes. Finalement, f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$ tout entier.

2) La fonction f est K-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ pour un certain $K\geqslant 0$ d'après **1)** et l'inégalité des accroissements finis. En particulier, pour tout $x\geqslant 0$: $\left|f(x)-f(0)\right|\leqslant Kx$, donc d'après l'inégalité triangulaire : $\left|f(x)\right|\leqslant Kx+\left|f(0)\right|$.
A fortiori : $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\leqslant\dfrac{K}{x}+\dfrac{\left|f(0)\right|}{x^2}$, donc par encadrement : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$.

---

9 Dérivable à dérivée bornée par $\dfrac12$ en valeur absolue, f est $\dfrac12$-lipschitzienne d'après l'inégalité des accroissements finis, donc pour tous $x,y\in\mathbb{R}$: $\left|f(x)-f(y)\right|\leqslant\dfrac{|x-y|}{2}$. En particulier, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\pi|=\left|f(u_n)-f(\pi)\right|\leqslant\dfrac{|u_n-\pi|}{2}$, puis par récurrence : $|u_n-\pi|\leqslant\dfrac{|u_0-\pi|}{2^n}=\dfrac{\pi}{2^n}$. Comme voulu : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\pi$ par encadrement.

---

10 Par imparité, il nous suffit de montrer que la fonction arcsinus n'est pas dérivable en 1.

La fonction arcsinus est **CONTINUE SUR** $[0,1]$ — hypothèse qu'on a tendance à oublier — et dérivable sur $[0,1[$. En outre, pour tout $x\in[0,1[$: $\operatorname{Arcsin}'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\underset{x\to1^-}{\longrightarrow}+\infty$. On en déduit, grâce au théorème de la limite de la dérivée, que : $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\operatorname{Arcsin}x-\operatorname{Arcsin}1}{x-1}=+\infty$. Comme voulu, Arcsin n'est pas dérivable en 1.

11

1) **a)** La fonction th est dérivable de dérivée $\operatorname{th}'=1-\operatorname{th}^2$ bornée par 1 en valeur absolue, donc 1-lipschitzienne d'après l'inégalité des accroissements finis. En particulier, pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|\operatorname{th}x|=|\operatorname{th}x-\operatorname{th}0|\leqslant|x-0|=|x|$.

b) Soit $x>0$. La fonction $t\longmapsto\operatorname{th}t-t$ est continue sur $[0,x]$ et dérivable sur $]0,x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis : $\operatorname{th}x-x=x\operatorname{th}'(c_x)=-x\operatorname{th}^2c_x$ pour un certain $c_x\in]0,x[$. Il en découle, sachant par ailleurs que la fonction th est croissante et positive sur $]0,x[$, que : $\left|\operatorname{th}x-x\right|=|x|\times\operatorname{th}^2c_x\overset{\text{a)}}{\leqslant}|x|\times c_x^2\leqslant|x|^3$.
Le résultat est bien sûr également vrai en 0, mais aussi sur $\mathbb{R}_-^*$ par imparité.

2) Pour commencer, f est clairement de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Ensuite : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = \operatorname{sh}'(0) = 1$, donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} f(x) = 1$.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$: $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sh} x - x\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x} = \dfrac{\operatorname{ch} x\,(\operatorname{th} x - x)}{\operatorname{sh}^2 x} = \dfrac{\operatorname{ch} x \times \dfrac{\operatorname{th} x - x}{x^2}}{\left(\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\right)^2} \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{\overset{\textbf{1)b)}}{\longrightarrow}} \dfrac{1\times 0}{1^2} = 0$. Il découle alors du théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Remarque : Dans sa version officielle, le théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ nous parle de fonctions f qui ne sont pas définies en le point a étudié et le résultat porte sur le prolongement par continuité de f et non pas sur f elle-même. Dans le contexte de cette question, la fonction f était au contraire déjà définie en $a = 0$, on n'a pas eu besoin de la prolonger, mais les limites calculées « $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}$ » évitent 0 comme le veut le théorème.
