Ensembles de nombres, équations, inéquations (je sais faire)

1 Forme irréductible d'un rationnel

✎ Je sais écrire un rationnel sous forme irréductible et mettre au même dénominateur une somme ou un produit de rationnels. Par ailleurs, je sais qu'il ne faut jamais donner un résultat sous forme non irréductible — par exemple $\frac{4}{6}$ à la place de $\frac{2}{3}$.

1 Simplifier $\frac{1}{5}+\frac{13}{30}-\frac{7}{6}+\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{20}+\frac{11}{10}-\frac{23}{30}-\frac{4}{15}$.

2 Inégalités

✎ Je sais que les symboles « $\leqslant$ » et « $<$ » ne signifient pas la même chose et je ne les utilise jamais sans me demander lequel des deux je veux vraiment.

✎ Je sais qu'en multipliant une inégalité par un réel positif, je conserve son sens, et qu'en la multipliant par un réel négatif, je le renverse. Je sais passer une inégalité à l'inverse.

2 Est-il vrai que $x^2 \geqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$?

3 On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^x \leqslant 1+x$. Comparer $(x-1)\mathrm{e}^x$ et x^2-1 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4 Que devient l'inégalité $-5 \leqslant -3$ quand on la passe à l'inverse ? Et l'inégalité $-2 < 7$?

✎ Je sais que pour majorer une fraction de réels positifs, on peut indépendamment majorer son numérateur et minorer son dénominateur.

5 Proposer un encadrement de $\frac{2x-1}{x^2+x+3}$ pour tout $x \in [1,3]$.

3 Valeurs absolues, puissances et racines carrées

✎ Je sais enlever les valeurs absolues d'une expression donnée en distinguant des cas.

6 Trouver pour tout $x \in \mathbb{R}$, en distinguant des cas, une expression de $|x+2| + \left|x^2 - 3x + 2\right|$ qui ne fasse apparaître aucune valeur absolue.

7 Est-il vrai que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad |x| \leqslant |x+1|$?

> ✎ Je sais interpréter la valeur absolue comme une distance. Je sais écrire une inégalité $|x-a| \leqslant \varepsilon$ sous la forme : $x \in \ldots$ et je sais aussi faire l'inverse.

8 Traduire pour tout $x \in \mathbb{R}$ les propositions : $\quad |2x-1| \leqslant 1$, $\quad$ puis : $\quad |x-2| > 3 \quad$ et : $\quad x \in [-1, 3]$.

> ✎ Je sais que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \sqrt{x^2} = |x|$, $\quad$ et non pas : $\quad \sqrt{x^2} \cancel{=} x \quad$ en général.

> ✎ Je sais que les équivalences suivantes sont fausses en général :
>
> $$ax = ay \quad \cancel{\Longleftrightarrow} \quad x = y, \qquad a^2 = b^2 \quad \cancel{\Longleftrightarrow} \quad a = b \qquad \text{et} \qquad x = \sqrt{a} \quad \cancel{\Longleftrightarrow} \quad x^2 = a$$
>
> et je sais les corriger pour les rendre correctes.

9 Résoudre l'équation $x\sqrt{x+1} = x^2$ d'inconnue $x \in [-1, +\infty[$.

4 Premiers pas complexes

10 Soit $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$. Exprimer : $\quad \mathrm{Re}(\mathrm{i}z)$, $\quad \mathrm{Im}(\mathrm{i}z)$, $\quad \mathrm{Re}\left(\mathrm{i}\overline{z}\right)$, $\quad \mathrm{Im}\left(\mathrm{i}\overline{z}\right) \quad$ et $\quad \mathrm{Re}\left(z^2\right) \quad$ en fonction de x et y — si possible de tête !

> ✎ Je sais exprimer $\mathrm{Re}(zz')$ et $\mathrm{Im}(zz')$ en fonction des parties réelle et imaginaire de z et z'.

11 Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{2-\mathrm{i}}{3-7\mathrm{i}}$.

> ✎ Je sais énoncer les propriétés usuelles du module, dont l'inégalité triangulaire généralisée. Je sais qu'un module au carré est souvent plus intéressant qu'un module en vertu de la relation de factorisation $|z|^2 = z\overline{z}$.

12 Exprimer $|z+1|^2$ en fonction de $|z|$ et $\mathrm{Re}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

> ✎ Je sais calculer sous forme algébrique les racines carrées d'un nombre complexe et résoudre les équations du second degré à coefficients complexes. Je sais que la notation $\sqrt{z}$ n'a de sens que si z est un réel positif.

13 Résoudre l'équation $z^2 - z = \mathrm{i} - 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

5 JE SAIS REPÉRER ET CORRIGER UNE ERREUR

Corriger, partout où c'est nécessaire, le calcul ou raisonnement suivant.

14 Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{3^{n^2}-1}{\left(3^n+1\right)^2-6^n-2} = \dfrac{3^{n^2}-1}{\left(9^{n^2}+2\times 3^n+1\right)-6^n-2} = \dfrac{3^{n^2}-1}{9^{n^2}-1} = \dfrac{1}{3^{n^2}+1}$.

15 Soit $x \in [-2,4[$ fixé. Clairement : $|x| \in [0,4[$, donc $|x|+3 \in [0,7[$.

En outre, toujours parce que $x \in [-2,4[$: $x^2 \in [4,16[$, donc $x^2+4 \in [8,20[$.

Conclusion : $\dfrac{|x|+3}{x^2+4} \in \left[0,\dfrac{7}{20}\right[$.

16 Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\big||x-1|-1\big|}{|x+2|+1} \leqslant \dfrac{\big|\left(|x|+1\right)-1\big|}{\left(|x|+2\right)+1} \leqslant \dfrac{|x|}{|x|+3} \leqslant 1$.

17 Pour tout $x \in [-8,+\infty[$:

$$\begin{aligned} \sqrt{x+8} = x+2 \quad &\iff \quad x+8 = (x+2)^2 \\ &\iff \quad x^2+3x-4 = 0 \\ &\iff \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 4. \end{aligned}$$

18 On cherche à résoudre l'équation $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = 1+\mathrm{Im}\left(z^2\right)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(z^2\right) = 1+\mathrm{Im}\left(z^2\right) \quad &\iff \quad \frac{z^2+\overline{z}^2}{2} = 1+\frac{z^2-\overline{z}^2}{2} \quad \iff \quad \overline{z}^2 = 1 \\ &\iff \quad \overline{z} = 1 \quad \iff \quad z = 1. \end{aligned}$$

19 On cherche l'ensemble des $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$ pour lesquels $\dfrac{z^2}{z-i} \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus\{i\}$:

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{z-i} \in \mathbb{R} \quad \iff \quad \frac{\mathrm{Im}\left(z^2\right)}{\mathrm{Im}(z)-1} = 0 \quad &\iff \quad \frac{2\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Im}(z)-1} = 0 \\ &\iff \quad \mathrm{Re}(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{Im}(z) = 0. \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est ainsi la réunion des droites d'équation $x=0$ et $y=0$.

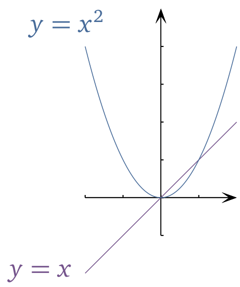
20 On cherche les racines carrées de $3-4i$. Pour tout $a,b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (a+ib)^2 = 3-4i \quad &\iff \quad \begin{cases} a^2-b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \\ a^2+b^2 = 25 \end{cases} \quad \iff \quad a^2 = 14 \quad \text{et} \quad b^2 = 11 \quad \text{et} \quad ab = -2 \\ &\iff \quad a = \pm\sqrt{14}, \quad b = \pm\sqrt{11} \quad \text{et} \quad ab = -2 \\ &\iff \quad (a,b) = \left(\sqrt{14},-\sqrt{11}\right) \quad \text{ou} \quad (a,b) = \left(-\sqrt{14},\sqrt{11}\right). \end{aligned}$$

Les racines carrées de $3-4i$ sont donc $\sqrt{14}-i\sqrt{11}$ et son conjugué.

6 Correction des exercices

1 $\dfrac{1}{5}+\dfrac{13}{30}-\dfrac{7}{6}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{15}$ et $\dfrac{7}{20}+\dfrac{11}{10}-\dfrac{23}{30}-\dfrac{4}{15}=\dfrac{5}{12}$.



2 C'est faux ! Pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$x^2\geqslant x \iff x(x-1)\geqslant 0 \iff x\in\,]-\infty,0]\cup[1,+\infty[.$$

L'inégalité proposée est donc fausse si $x\in\,]0,1[$, ce que la figure ci-contre illustre bien.

3 Pour tout $x\geqslant 1$: $x-1\geqslant 0$, donc $(x-1)\,e^x\geqslant(x-1)(x+1)=x^2-1$, et pour tout $x<1$: $x-1<0$, donc $(x-1)\,e^x\leqslant(x-1)(x+1)=x^2-1$.

4 $-\dfrac{1}{3}\leqslant-\dfrac{1}{5}$ et $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{7}$.

5 Pour tout $x\in[1,3]$: $\dfrac{1}{15}\leqslant\dfrac{2x-1}{x^2+x+3}\leqslant\dfrac{5}{5}=1$.

6 Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|x+2|+\left|x^2-3x+2\right|=|x+2|+\left|(x-1)(x-2)\right|=\begin{cases}(-x-2)+\left(x^2-3x+2\right)=x^2-4x & \text{si } x\leqslant -2\\ (x+2)+\left(x^2-3x+2\right)=x^2-2x+4 & \text{si } -2<x\leqslant 1\\ (x+2)+\left(-x^2+3x-2\right)=-x^2+4x & \text{si } 1<x\leqslant 2\\ (x+2)+\left(x^2-3x+2\right)=x^2-2x+4 & \text{si } x>2.\end{cases}$

7 C'est faux ! Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|x|\leqslant|x+1| \iff x^2\leqslant(x+1)^2 \iff 2x+1\geqslant 0 \iff x\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

8 Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|2x-1|<1 \iff x\in[0,1]$, puis :

$|x-2|>3 \iff x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]5,+\infty[$ et : $x\in[-1,3] \iff |x-2|\leqslant 2$.

9 Pour tout $x\in[-1,+\infty[$:

$$x\sqrt{x+1}=x^2 \iff x=0 \ \text{ ou } \ \sqrt{x+1}=x \iff x=0 \ \text{ ou } \ \left(x^2=x+1 \ \text{ et } \ x\geqslant 0\right) \iff x\in\left\{0,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}.$$

10 Pour tout $z\in\mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(iz)=-y$, $\mathrm{Im}(iz)=x$, $\mathrm{Re}\left(i\overline{z}\right)=y$, $\mathrm{Im}\left(i\ \overline{z}\right)=x$ et $\mathrm{Re}\left(z^2\right)=x^2-y^2$.

11 $\dfrac{2-i}{3+7i}=\dfrac{13}{58}+\dfrac{11}{58}i$.

12 Pour tout $z\in\mathbb{C}$: $|z+1|^2=(z+1)\left(\overline{z}+1\right)=z\overline{z}+z+\overline{z}+1=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z)+1$.

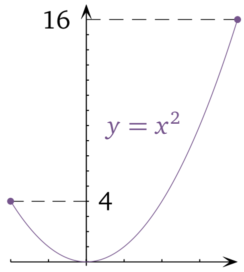
13 Discriminant : $-3+4i$. Racines carrées du discriminant : $\pm(1+2i)$. Solutions de l'équation : $-i$ et $1+i$.

14

- **Première erreur :** $\left(3^n\right)^2=3^{2n}=9^n\neq 3^{n^2}$.
- **Deuxième erreur :** Pour $n\neq 1$: $6^n=(2\times 3)^n=2^n\times 3^n\neq 2\times 3^n$.

15

- **Fausse erreur :** Le passage de : $|x| \in [0,4[$ à : $|x|+3 \in [0,7[$ n'est pas incorrect car $[3,7[\subset [0,7[$, mais on aurait aussi pu proposer mieux : $|x|+3 \in [3,7[$.
- **Première erreur :** Le passage de : $x \in [-2,4[$ à : $x^2 \in [4,16[$ est incorrect, la deuxième proposition devrait être : $x^2 \in [0,16[$ comme le justifie clairement la figure ci-dessous — attention, l'unité des abscisses n'est pas la même que celle des ordonnées.



- **Deuxième erreur :** Le passage de : $|x|+3 \in [0,7[$ et : $x^2+4 \in [8,20[$ à : $\dfrac{|x|+3}{x^2+4} \in \left[0, \dfrac{7}{20}\right[$ est incorrect car le passage à l'inverse renverse les inégalités positives, la conclusion devrait donc plutôt être : $\dfrac{|x|+3}{x^2+4} \in \left[0, \dfrac{7}{8}\right[$. On pourrait même conclure par : $\dfrac{|x|+3}{x^2+4} \in \left[\dfrac{3}{20}, \dfrac{7}{8}\right[$ en corrigeant la fausse erreur décrite ci-dessus.

16

- **Première erreur :** Il est vrai d'après l'inégalité triangulaire que $|x-1| \leqslant |x|+1$, mais tout à fait faux a priori que : $\big||x-1|-1\big| \leqslant \big|\big(|x|+1\big)-1\big|$. Pourquoi ? Le raisonnement sous-jacent, c'est que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:
$$a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad |a| \leqslant |b|, \qquad \textsc{ce qui est faux !}$$
Cela revient à affirmer que la fonction valeur absolue est croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Deuxième erreur :** D'après l'inégalité triangulaire : $|x+2| \leqslant |x|+2$, mais le passage à l'inverse renverse les inégalités positives, donc : $\dfrac{1}{\big(|x|+2\big)+1} \leqslant \dfrac{1}{|x+2|+1}$ et non le contraire comme le suggère le calcul proposé.

17

- **Première erreur :** Autant il est vrai que : $\sqrt{x+8} = x+2 \implies x+8 = (x+2)^2$, autant il est faux que : $x+8 = (x+2)^2 \implies \sqrt{x+8} = x+2$, car n'oublions pas que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt{a^2} = |a|$. Ce qui est vrai, si l'on veut, c'est ceci : $x+8 = (x+2)^2 \implies \sqrt{x+8} = |x+2|$.

  Il est bien sûr possible de corriger l'équivalence proposée :
$$\sqrt{x+8} = x+2 \quad \Longleftrightarrow \quad x+8 = (x+2)^2 \quad \boxed{\text{et} \quad x+2 \geqslant 0.}$$
- **Deuxième erreur :** Les solutions de l'équation $x^2+3x-4=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ sont 1 et -4.

18

- **Première erreur :** Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ **AVEC UN « i » AU DÉNOMINATEUR !** La première équivalence est donc fausse.
- **Deuxième erreur :** L'équivalence : $\overline{z}^2 = 1 \iff \overline{z} = 1$ est fausse, il faut la remplacer par :
$$\overline{z}^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} = 1 \quad \text{ou} \quad \overline{z} = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad z \in \big\{-1, 1\big\}.$$

---

19 Une seule erreur, mais de taille ! En général : $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z'}{z}\right) \neq \dfrac{\mathrm{Im}(z')}{\mathrm{Im}(z)}$. La première équivalence est donc fausse. Pour calculer la partie imaginaire de $\dfrac{z^2}{z-\mathrm{i}}$, on peut procéder de la manière suivante :
$$\mathrm{Im}\left(\frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{z^2\big(\overline{z}+\mathrm{i}\big)}{|z-\mathrm{i}|^2}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{z|z|^2+\mathrm{i}z^2}{\mathrm{Re}(z)^2+\big(\mathrm{Im}(z)-1\big)^2}\right) = \frac{\mathrm{Im}(z)\,|z|^2+\mathrm{Im}\big(\mathrm{i}z^2\big)}{\mathrm{Re}(z)^2+\big(\mathrm{Im}(z)-1\big)^2} = \frac{\mathrm{Im}(z)\,|z|^2+\mathrm{Re}\big(z^2\big)}{|z|^2-2\,\mathrm{Im}(z)+1}$$
$$= \frac{\mathrm{Im}(z)\,|z|^2+\big(\mathrm{Re}(z)^2-\mathrm{Im}(z)^2\big)}{|z|^2-2\,\mathrm{Im}(z)+1}.$$
Bref, c'est plutôt affreux et il n'est pas si facile de décrire l'ensemble des nombres $z \in \mathbb{C} \setminus \big\{\mathrm{i}\big\}$ pour lesquels $\dfrac{z^2}{z-\mathrm{i}} \in \mathbb{R}$!

20

- **Première erreur :** L'équation des modules s'écrit ici : $a^2 + b^2 = |a + \mathrm{i}b|^2 = |3 - 4\mathrm{i}| = \sqrt{25} = 5 \neq 25$.
- **Deuxième erreur :** Malencontreuse erreur dans la conclusion ! Les racines carrées de $3-4\mathrm{i}$ sont $\sqrt{14} - \mathrm{i}\sqrt{11}$ et son **OPPOSÉ** : $-\sqrt{14} + \mathrm{i}\sqrt{11}$ — et non pas son **CONJUGUÉ**.
