Équations différentielles et suites récurrentes linéaires (je sais faire)

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

✎ Je sais décrire les solutions de l'équation différentielle linéaire homogène : $y' + a(x)y = 0$.

1 Résoudre les équations différentielles : $y' - 5y = 0$ et $2y' + xy = 0$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

✎ Je sais trouver une solution particulière de l'équation différentielle linéaire : $y' + a(x)y = b(x)$ grâce à la méthode de variation de la constante, puis décrire l'ensemble de ses solutions. Je sais résoudre un problème de Cauchy.

2 Résoudre l'équation différentielle : $y' + \dfrac{3y}{x} = 1$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

✎ Je sais utiliser le principe de superposition pour simplifier mes calculs quand le second membre est une somme de termes simples.

✎ Je sais trouver une solution particulière de l'équation : $y' + ay = Ae^{\lambda x}$ sans variation de la constante, ainsi que des équations : $y' + ay = Ae^{\lambda x}\sin(\omega x)$ et $y' + ay = Ae^{\lambda x}\cos(\omega x)$. J'ai bien compris que la technique ici utilisée n'est valable que lorsque a est une **constante** — et non pas une fonction.

3 Déterminer l'unique solution du problème de Cauchy : $y' + y = 3e^{-x}\sin x + e^x + 2$ et $y(0) = 0$ d'inconnue $y \in \mathscr{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

✎ Je sais décrire les solutions **complexes** de l'équation différentielle linéaire homogène : $ay'' + by' + cy = 0$ à coefficients **constants**.

✎ Je sais décrire les solutions **réelles** de l'équation différentielle linéaire homogène : $ay'' + by' + cy = 0$ à coefficients **constants**. Je sais résoudre l'équation d'un oscillateur harmonique : $y'' + \omega^2 y = 0$ sans repasser par son polynôme caractéristique.

4 Résoudre les équations différentielles : $y''-5y'+4y=0$, $y''-6y'+9y=0$ et $y''+2y+5y=0$ d'inconnue y deux fois dérivable. On donnera d'abord les solutions complexes, puis les solutions réelles.

✎ Je sais trouver une solution particulière de l'équation : $ay''+by'+cy=Ae^{\lambda x}$, ainsi que des équations : $ay''+by'+cy=Ae^{\lambda x}\sin(\omega x)$ et $ay''+by'+cy=Ae^{\lambda x}\cos(\omega x)$.

5 Résoudre l'équation différentielle linéaire : $y''+3y'+2y=\cos x$ d'inconnue $y\in\mathscr{D}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3 Suites récurrentes linéaires

✎ Je sais calculer le terme général d'une suite arithmétique ou géométrique.

6 Déterminer une expression explicite de l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=u_n+2$. Même question en remplaçant : u_n+2 par : $2u_n$.

✎ Je sais calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique.

7 Déterminer une expression explicite de l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}=5u_n-2$.

✎ Je sais calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dans les cas complexe et réel.

8 Déterminer une expression explicite de l'unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$. Même question en remplaçant : $5u_{n+1}-6u_n$ par : $4u_{n+1}-4u_n$, puis par : $2u_{n+1}-4u_n$.

4 Correction des exercices

1 **Équation $y'-5y=0$:** $\quad x\longmapsto \lambda e^{5x}, \quad \lambda$ décrivant $\mathbb{R}$.

Équation $2y'+xy=0$: $\quad x\longmapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}, \quad \lambda$ décrivant $\mathbb{R}$.

---

2 **Équation $y'+\dfrac{3y}{x}=1$:** $\quad x\longmapsto \dfrac{\lambda}{x^3}+\dfrac{x}{4}, \quad \lambda$ décrivant $\mathbb{R}$.

---

3 **Équation $y'+y=3e^{-x}\sin x+e^x+2$:** $\quad x\longmapsto \lambda e^{-x}-3e^{-x}\cos x+\dfrac{e^x}{2}+2, \quad \lambda$ décrivant $\mathbb{R}$.

Problème de Cauchy $y(0)=0$: $\quad x\longmapsto \dfrac{e^{-x}}{2}-3e^{-x}\cos x+\dfrac{e^x}{2}+2=\operatorname{ch} x-3e^{-x}\cos x+2.$

---

4 **Équation $y''-5y'+4y=0$:** $\begin{cases} x\longmapsto \lambda e^x+\mu e^{4x}, & \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{C}, \\ x\longmapsto \lambda e^x+\mu e^{4x}, & \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{R}. \end{cases}$

Équation $y''-6y'+9y=0$: $\begin{cases} x\longmapsto (\lambda x+\mu)e^{3x}, & \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{C}, \\ x\longmapsto (\lambda x+\mu)e^{3x}, & \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{R}. \end{cases}$

Équation $y''+2y+5y=0$: $\begin{cases} x\longmapsto e^{-x}\big(\lambda e^{2ix}+\mu e^{-2ix}\big), & \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{C}, \\ x\longmapsto e^{-x}\big(\lambda\sin(2x)+\mu\cos(2x)\big), & \lambda \text{ et } \mu \text{ décrivant } \mathbb{R}. \end{cases}$

---

5 **Équation intermédiaire $y''+3y'+2y=e^{ix}$:** $\quad x\longmapsto \lambda e^{-x}+\mu e^{-2x}+\dfrac{1-3i}{10}\,e^{ix}, \quad \lambda$ et μ décrivant $\mathbb{C}$.

Équation $y''+3y'+2y=\cos x$: $\quad x\longmapsto \lambda e^{-x}+\mu e^{-2x}+\dfrac{3\sin x+\cos x}{10}, \quad \lambda$ et μ décrivant $\mathbb{R}$.

---

6 **Suite arithmétique :** Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_n=2n+3$.

Suite géométrique : Pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_n=3\times 2^n$.

---

7 Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad 5x-2=x \iff x=\dfrac{1}{2}$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\lambda 5^n+\dfrac{1}{2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour un certain $\lambda\in\mathbb{R}$. Or : $u_0=1$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_n=\dfrac{5^n+1}{2}$.

---

8 **Suite $u_{n+2}=5u_{n+1}-6u_n$:** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\big(\lambda 2^n+\mu 3^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. En tenant compte des conditions initiales, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_n=3^n-2^n$.

Suite $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$: La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\big((\lambda n+\mu)2^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. En tenant compte des conditions initiales, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_n=\dfrac{n}{2}\,2^n=2^{n-1}n$.

Suite $u_{n+2}=2u_{n+1}-4u_n$: Les racines du polynôme caractéristique sont $1\pm i\sqrt{3}$, de module 2 et d'arguments $\pm\dfrac{\pi}{3}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(\left(\lambda\sin\dfrac{n\pi}{3}+\mu\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)2^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pour certains $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. En tenant compte des conditions initiales, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\quad u_n=\dfrac{2^n}{\sqrt{3}}\,\sin\dfrac{n\pi}{3}$.
