FONCTIONS CIRCULAIRES (JE SAIS FAIRE)

1 CONGRUENCES

1 Vrai ou faux ? Justifier.

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y\ [2\pi] \implies x \equiv y\ [\pi].$
2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y\ [\pi] \implies x \equiv y\ [2\pi].$
3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 2x \equiv 2y\ [2\pi] \implies x \equiv y\ [\pi].$
4) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y\ [\pi] \implies 2x \equiv 2y\ [\pi].$
5) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 2x \equiv 2y\ [\pi] \implies x \equiv y\ [\pi].$

2 FONCTIONS sin, cos ET tan

✎ Je sais tracer l'allure des graphes des fonctions sin, cos et tan et je connais par cœur les valeurs usuelles de ces fonctions, y compris pour tan.

2 Déterminer de tête les valeurs de : $\sin\frac{7\pi}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{3\pi}{4}$, $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$ et $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

✎ Je sais dériver les fonctions sin, cos et tan. Je sais que la formule de dérivation de tan permet de calculer une tangente à partir d'un cosinus et vice versa.

✎ Je sais résoudre les équations : $\sin x = \sin y$, $\cos x = \cos y$ et $\tan x = \tan y$, et je sais visualiser sur une figure pourquoi le résultat est vrai.

3 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$: $\sin(2x) = \sin(3x)$ et $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$.

✎ Je sais retrouver de tête, mais sur un dessin, les formes simplifiées des expressions du genre : $\sin(x+\pi)$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(\pi - x)$...

4 On peut résumer la 2π-périodicité du (co)sinus en disant que « la fonction $x \longmapsto x + 2\pi$ préserve le (co)sinus ». Quelle autre transformation importante préserve le cosinus ? le sinus ? Quelle transformation importante transforme le sinus en cosinus et vice versa ?

5 Simplifier pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\cos(x + 17\pi)$ et $\sin\big(x + n(n+1)\pi\big)$.

✎ Je sais par cœur les développements : $\sin(x \pm y)$, $\tan(x \pm y)\ldots$ Je sais retrouver rapidement les développements correspondants pour : $\sin x \cos y$, $\cos x \cos y\ldots$ Je sais enfin par cœur les formules de duplication.

✎ Je sais transformer : $a \cos\theta + b \sin\theta$ en : $c \cos(\theta + \varphi)$ ou $c \sin(\theta + \varphi)$.

6 Proposer des valeurs de c et φ pour lesquelles pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = c\sin(\theta + \varphi)$.

3 Fonctions Arcsin, Arccos et Arctan

✎ Je sais définir les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan. J'ai compris l'importance du domaine de référence grâce auquel chacune de ces fonctions est définie.

7 Pour quelles valeurs de x les relations : $\mathrm{Arcsin}\,\sin x = x$ et $\sin \mathrm{Arcsin}\, x = x$ sont-elles vraies ? Même question avec les fonctions cos/Arccos et tan/Arctan.

8 Simplifier : $\mathrm{Arccos}\,\cos\dfrac{29\pi}{6}$ et $\mathrm{Arcsin}\,\sin\dfrac{17\pi}{6}$.

✎ Je sais tracer l'allure des graphes des fonctions Arcsin, Arccos et Arctan.

✎ Je sais dériver les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan et je sais sur quels domaines elles sont dérivables.

9 Les fonctions Arcsin et Arccos ont les mêmes dérivées au signe près. Quelle interprétation géométrique ?

4 Correction des exercices

1

1) Vrai. Si : $x = y + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors : $x = y + k'\pi$ avec : $k' = 2k$ et k' est bien un entier.

2) Faux. Si : $x = y + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, rien ne garantit que k est pair. Par exemple : $0 \equiv \pi\ [\pi]$ mais : $0 \not\equiv \pi\ [2\pi]$.

3) Vrai. Si : $2x = 2y + 2k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors : $x = y + k\pi$, tout simplement !

4) Vrai. Si : $x = y + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, alors : $2x = 2y + 2k\pi = 2y + k'\pi$ avec : $k' = 2k$ et k' est bien un entier.

5) Faux. Si : $2x = 2y + k\pi$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$, rien ne garantit que k est pair. Par exemple : $2 \times \dfrac{\pi}{2} \equiv 2 \times 0\ [\pi]$ mais : $\dfrac{\pi}{2} \not\equiv 0\ [\pi]$.

---

2 $\sin\dfrac{7\pi}{2} = -1$, $\cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\left(-\dfrac{8\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$ et $\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

---

3 Pour tout $x \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned}
\cos(2x) = -\frac{1}{2} &\iff \cos(2x) = \cos\frac{2\pi}{3} \\
&\iff 2x \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\
&\iff x \equiv \frac{\pi}{3}\ [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{3}\ [\pi] \\
&\iff x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\} \quad \text{ou} \quad x \in \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\} \iff x \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}
\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
\sin(2x) = \sin(3x) &\iff 2x \equiv 3x\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv \pi - 3x\ [2\pi] \\
&\iff x \equiv 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{5}\ \left[\frac{2\pi}{5}\right] \\
&\overset{x\in[0,2\pi[}{\iff} x = 0 \quad \text{ou} \quad x \in \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\} \iff x \in \left\{0, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \pi, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}.
\end{aligned}$$

---

4 La fonction $x \longmapsto -x$ préserve le cosinus par parité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \cos x$.

La fonction $x \longmapsto \pi - x$ préserve quant à elle le sinus : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sin(\pi - x) = \sin x$.

La fonction $x \longmapsto \dfrac{\pi}{2} - x$ transforme les sinus en cosinus et vice versa :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \quad \text{et} \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$$

---

5 Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\cos(x + 17\pi) = -\cos x$ et $\sin\big(x + n(n+1)\pi\big) = \sin x$ car $n(n+1)$, produit de deux entiers consécutifs, est pair.

---

6 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\sqrt{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - \dfrac{1}{2}\sin\theta\right) = 2\sqrt{3}\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\theta + \cos\dfrac{2\pi}{3}\sin\theta\right) = 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

---

7 Pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\mathrm{Arcsin}\ \sin x = x$ et pour tout $x \in [-1, 1]$: $\sin \mathrm{Arcsin}\ x = x$.

Pour tout $x \in [0, \pi]$: $\mathrm{Arccos}\ \cos x = x$ et pour tout $x \in [-1, 1]$: $\cos \mathrm{Arccos}\ x = x$.

Pour tout $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$: $\mathrm{Arctan}\ \tan x = x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\tan \mathrm{Arctan}\ x = x$.

---

8 $\mathrm{Arccos}\ \cos\dfrac{29\pi}{6} = \mathrm{Arccos}\ \cos\dfrac{5\pi}{6} \overset{\frac{5\pi}{6}\in[0,\pi]}{=} \dfrac{5\pi}{6}$.

$\mathrm{Arcsin}\ \sin\dfrac{17\pi}{6} = \mathrm{Arcsin}\ \sin\dfrac{5\pi}{6} = \mathrm{Arcsin}\ \sin\left(\pi - \dfrac{5\pi}{6}\right) = \mathrm{Arcsin}\ \sin\dfrac{\pi}{6} \overset{\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}{=} \dfrac{\pi}{6}$.

9 L'égalité : $\mathrm{Arcsin}' = -\mathrm{Arccos}'$ sur $]-1,1[$ s'écrit aussi : $\big(\mathrm{Arcsin} + \mathrm{Arccos}\big)' = 0$ et montre donc que la fonction $x \longmapsto \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x$ est constante sur $]-1,1[$ — de valeur $\dfrac{\pi}{2}$ après évaluation en 0 par exemple. Par continuité en -1 et 1, on peut même dire que pour tout $x \in [-1,1]$: $\mathrm{Arccos}\, x = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arcsin}\, x$. Cette relation signifie géométriquement que le graphe de la fonction Arccos est le symétrique du graphe de la fonction Arcsin par rapport à la droite horizontale d'équation : $y = \dfrac{\pi}{4}$.