INJECTIONS, SURJECTIONS, BIJECTIONS (JE SAIS FAIRE)

1 INJECTIONS

✎ Je sais définir la notion d'injectivité et l'expliquer sur des figures.

1 Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E. Si f est injective, sa restriction $f|_A$ l'est-elle forcément ?

2 Les fonctions suivantes sont-elles injectives sur leur ensemble de définition ? Sur quels intervalles de longueur maximale le sont-elles chacune ? On attend ici seulement une justification graphique.

$$x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*), \qquad x \longmapsto |x|, \qquad x \longmapsto \sin x, \qquad x \longmapsto \operatorname{th} x, \qquad x \longmapsto \operatorname{Arccos} x \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \operatorname{ch}(2x-4).$$

3 Pour toute partie X de $\mathbb{N}$, on pose $2X = \left\{2x \mid \ x \in X\right\}$. L'application $X \longmapsto X \cup 2X$ est-elle injective sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$?

✎ Lorsque $g \circ f$ est injective, laquelle des deux applications f et g l'est aussi ? Je n'ai pas appris par cœur le résultat, je le retrouve chaque fois parce que je le comprends.

✎ Je sais quelle implication lie les notions d'injectivité et de stricte monotonie.

2 SURJECTIONS

✎ Je sais définir la notion de surjectivité et l'expliquer sur des figures. Je sais différencier les propositions « f est à valeurs dans F » et « f est surjective de E sur F ». Je sais enfin qu'une application est toujours surjective de son ensemble de définition sur son image.

4 Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et A une partie de E. Si f est surjective de E sur F, sa restriction $f|_A$ l'est-elle de A sur F ?

✎ Lorsque $g \circ f$ est surjective, laquelle des deux applications f et g l'est aussi ? Je n'ai pas appris par cœur le résultat, je le retrouve chaque fois parce que je le comprends.

3 BIJECTIONS

✎ Je sais définir et relier les notions de réciproque et de bijectivité.

5 Donner l'exemple de deux ensembles E et F et de deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ pour lesquelles $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ mais $f \circ g \neq \mathrm{Id}_F$.

✎ Je sais calculer la réciproque d'une composée.

6 Justifier de tête que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{e^x - 1}$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer de tête sa réciproque.

✎ Je sais décrire les trois situations du tableau de synthèse qui explique comment on doit s'y prendre concrètement pour montrer qu'une application est bijective.

7 Montrer que l'application $X \longmapsto \overline{X}$ est bijective de $\mathscr{P}(E)$ sur lui-même.

8 Montrer que l'application $(x, y) \longmapsto \big(|x| + y, x\big)$ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

9 Montrer que l'application qui associe à toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \longmapsto f(2x)$ est bijective de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sur lui-même.

✎ Je sais expliquer par étapes comment on passe des propositions « f est continue sur $[a, b]$ » et « f est strictement croissante sur $[a, b]$ » à la proposition « f est bijective de $[a, b]$ sur $\big[f(a), f(b)\big]$ ».

4 Images directes et réciproques

✎ Je sais écrire avec des quantificateurs la définition de l'image $f(A)$ d'une partie A par une application f et me représenter cette définition sur des figures.

10 Préciser l'image des fonctions usuelles suivantes : $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$, $x \longmapsto \operatorname{ch} x$ $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, et $x \longmapsto \operatorname{th} x$.

11 Déterminer l'image par la fonction tangente des ensembles $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$ et $\dfrac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}$.

✎ Je sais écrire avec des quantificateurs la définition de l'image réciproque $f^{-1}(B)$ d'une partie B par une application f et me représenter cette définition sur des figures.

12 Déterminer l'image réciproque par la fonction tangente des ensembles suivants $[1, 4[$ et $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

✎ Je sais qu'on ne peut pas parler de l'application f^{-1} si f n'est pas bijective, mais je sais qu'on peut en revanche toujours noter $f^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par f.

13 Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F. Comparer en toute généralité A et $f^{-1}\big(f(A)\big)$ ainsi que B et $f\big(f^{-1}(B)\big)$.

5 Correction des exercices

1 Qui peut le plus peut le moins, donc oui, $f|_A$ est injective. Si : $\forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$, il est tout à fait clair que : $\forall x, x' \in A, \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$.

2 Dans chacune des situations suivantes, les intervalles de longueur maximale sur lesquels la fonction considérée est injective sont simplement les intervalles de longueur maximale sur lesquels elle est strictement monotone.

La fonction $x \longmapsto x^n$ est injective sur $\mathbb{R}$ pour n impair, mais pas pour n pair. Dans ce cas, tout de même, $x \longmapsto x^n$ est injective sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$.

La fonction $x \longmapsto |x|$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$.

La fonction $x \longmapsto \sin x$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est sur $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right]$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction $x \longmapsto \operatorname{th} x$ est injective sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La fontion $x \longmapsto \operatorname{Arccos} x$ est injective sur $[-1, 1]$ tout entier.

La fonction $x \longmapsto \operatorname{ch} x$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais elle l'est sur $]-\infty, 2]$ et $[2, +\infty[$.

3 En notant f l'application étudiée : $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup 2\mathbb{N} = \mathbb{N}$ et :

$$f\big(\mathbb{N} \setminus \{2\}\big) = \big(\mathbb{N} \setminus \{2\}\big) \cup 2\big(\mathbb{N} \setminus \{2\}\big) = \big(\mathbb{N} \setminus \{2\}\big) \cup \big(2\mathbb{N} \setminus \{4\}\big) = \mathbb{N},$$

donc f n'est pas injective.

4 Non, $f|_A$ n'est pas forcément surjective de A sur F. La surjectivité de f signifie que tout élément de F possède un antécédent par f **dans** E, mais rien ne garantit qu'il en existe toujours un **dans** A.

5 Penser aux fonctions $n \overset{f}{\longmapsto} n+1$ et $n \overset{g}{\longmapsto} \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n-1 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

6 La fonction $x \longmapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$, la fonction $x \longmapsto x - 1$ de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f l'est de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa réciproque, qui défait pas à pas le travail des trois fonctions dont f est la composée est $y \longmapsto \ln\big(y^2 + 1\big)$.

7 L'application $X \overset{f}{\longmapsto} \overline{X}$ est sa propre réciproque car $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}(\mathbb{N})}$.

8 En notant f l'application étudiée, le plus simple consiste à trouver une réciproque à f. Or pour tous $(x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a, b) = f(x, y) \iff \begin{cases} |x| + y = a \\ x = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = b \\ y = a - |b|. \end{cases}$$

Ce raisonnement montre que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que l'application $(a, b) \longmapsto \big(b, a - |b|\big)$ en est la réciproque.

9 L'application qui associe à toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \longmapsto f\left(\frac{x}{2}\right)$ est réciproque de l'application étudiée, qui se trouve par conséquent bijective de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sur lui-même.

10 Image de $x \longmapsto \ln x$: $\mathbb{R}_+^*$. Image de $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Image de $x \longmapsto \operatorname{ch} x$: $[1, +\infty[$.

Image de $x \longmapsto \frac{1}{x}$: $\mathbb{R}^*$. Image de $x \longmapsto \operatorname{th} x$: $]-1, 1[$.

11 $\tan\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right[\right) = [0, 1[$ et $\tan\left(\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}\right) = \left\{\sqrt{3}\right\}$.

12 $\tan^{-1}\big([1, 4[\big) = \left[\frac{\pi}{4}, \operatorname{Arctan} 4\right[+ \pi\mathbb{Z}$ et $\tan^{-1}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right) = \frac{\pi}{6} + \pi\mathbb{Z}$.

13 Montrons que $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$. Pour tout $a \in A$: $f(a) \in f(A)$, donc $a \in f^{-1}\big(f(A)\big)$ par définition d'une image réciproque.

Montrons que $f\big(f^{-1}(B)\big) \subset B$. Pour tout $y \in f\big(f^{-1}(B)\big)$: $y = f(x)$ pour un certain $x \in f^{-1}(B)$, ce qui signifie que $f(x) \in B$, et ainsi $y \in B$.