Injections, surjections, bijections (je sais faire)

1 Généralités sur les applications

✎ Je sais écrire avec des quantificateurs la définition de l'image $f(A)$ d'une partie A par une application f et me représenter cette définition sur des figures.

1 Déterminer l'image par la fonction tangente des ensembles suivants : $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ et $\frac{\pi}{3} + \pi\mathbb{Z}$.

✎ Je sais écrire avec des quantificateurs la définition de l'image réciproque $f^{\leftarrow}(B)$ / $f^{-1}(B)$ d'une partie B par une application f et me représenter cette définition sur des figures.

2 Déterminer l'image réciproque par la fonction tangente des ensembles suivants : $[1, 4[$ et $\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

2 Injections

✎ Je sais définir la notion d'injectivité et l'expliquer sur des figures.

3 Parmi les fonctions usuelles suivantes, lesquelles sont injectives sur leur ensemble de définition ? Lesquelles ne le sont pas ? On attend ici seulement une justification graphique.

$$x \longmapsto x^n \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad x \longmapsto |x|, \qquad x \longmapsto \operatorname{th} x, \qquad x \longmapsto \operatorname{Arccos} x \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto \operatorname{ch} x.$$

4 Proposer différents domaines, les plus grands possibles, sur lesquels la fonction sinus est injective. Même questions avec les fonctions cosinus et tangente.

✎ Lorsque $g \circ f$ est injective, laquelle des deux applications f et g l'est aussi ? Je n'ai pas appris par cœur le résultat, je le retrouve chaque fois parce que je le comprends.

✎ Je sais quelle implication lie les notions d'injectivité et de stricte monotonie.

3 SURJECTIONS

✎ Je sais définir la notion de surjectivité et l'expliquer sur des figures. Je sais différencier les propositions : « f est à valeurs dans F » et « f est surjective de E sur F ». Je sais enfin qu'une application est toujours surjective de son ensemble de définition sur son image.

5 Préciser l'image des fonctions usuelles suivantes : $x \longmapsto \ln x$, $x \longmapsto \operatorname{Arcsin} x$, $x \longmapsto \operatorname{ch} x$ $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, et $x \longmapsto \operatorname{th} x$.

✎ Lorsque $g \circ f$ est surjective, laquelle des deux applications f et g l'est aussi ? Je n'ai pas appris par cœur le résultat, je le retrouve chaque fois parce que je le comprends.

4 BIJECTIONS

✎ Je sais définir de deux manières différentes la notion de bijectivité.

✎ Je sais définir la notion de réciproque et je sais la relier à la notion de bijection.

6 Donner l'exemple de deux ensembles E et F et de deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ pour lesquelles : $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ mais : $f \circ g \neq \mathrm{Id}_F$.

✎ Je sais calculer la réciproque d'une composée.

7 Justifier de tête que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \sqrt{e^x - 1}$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et calculer de tête sa réciproque.

✎ Je sais décrire les trois situations du tableau vu en cours qui explique comment on doit s'y prendre concrètement pour montrer qu'une application est bijective.

8 Montrer que l'application $(x, y) \overset{f}{\longmapsto} \big(|x| + y, x\big)$ est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

✎ Je sais qu'on ne peut pas parler de l'application f^{-1} si f n'est pas bijective, mais je sais qu'on peut en revanche toujours noter $f^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par f.

✎ Je sais expliquer par étapes comment passer des propositions : « f est continue sur $[a, b]$ » et « f est strictement croissante sur $[a, b]$ » à la proposition : « f est bijective de $[a, b]$ sur $\big[f(a), f(b)\big]$ ».

5 Correction des exercices

1 $\tan\left(\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\right) = [0,1[$ et $\tan\left(\frac{\pi}{3}+\pi\mathbb{Z}\right) = \left\{\sqrt{3}\right\}$.

2 $\tan^{-1}\left([1,4[\right) = \left[\frac{\pi}{4}, \text{Arctan } 4\right[+ \pi\mathbb{Z}$ et $\tan^{-1}\left(\left\{\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right) = \frac{\pi}{6}+\pi\mathbb{Z}$.

3 Injectives : $x \longmapsto x^n$ pour n impair, $x \longmapsto \text{th}\, x$ et $x \longmapsto \text{Arccos}\, x$.
Non injectives : $x \longmapsto x^n$ pour n pair, $x \longmapsto |x|$ et $x \longmapsto \text{ch}\, x$.

4 La fonction sinus est injective sur $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$... mais aussi $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{5\pi}{2}\right]$... et si on accepte des domaines qui ne sont pas des intervalles, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$ par exemple.

La fonction cosinus est injective sur $[0,\pi]$, $[\pi,2\pi]$, $[2\pi,3\pi]$... mais aussi $[-\pi,0]$... et si on accepte des domaines qui ne sont pas des intervalles, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right[$ par exemple.

La fonction tangente est injective sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right[$... mais aussi $\left]-\frac{3\pi}{2},-\frac{5\pi}{2}\right[$... et si on accepte des domaines qui ne sont pas des intervalles, $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ par exemple.

5 Image de $x \longmapsto \ln x$: $\mathbb{R}_+^*$. Image de $x \longmapsto \text{Arcsin}\, x$: $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. Image de $x \longmapsto \text{ch}\, x$: $[1,+\infty[$.
Image de $x \longmapsto \frac{1}{x}$: $\mathbb{R}^*$. Image de $x \longmapsto \text{th}\, x$: $]-1,1[$.

6 Penser aux fonctions $n \overset{f}{\longmapsto} n+1$ et $n \overset{g}{\longmapsto} \begin{cases} 0 & \text{si } n=0 \\ n-1 & \text{si } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

7 La fonction $x \longmapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $[1,+\infty[$, la fonction $x \longmapsto x-1$ de $[1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction $\sqrt{\cdot}$ de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, donc f l'est de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa réciproque, qui défait pas à pas le travail des trois fonctions dont f est la composée est $y \longmapsto \ln\left(y^2+1\right)$.

8 Le plus simple consiste à trouver une réciproque à f. Or pour tous $(x,y),(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

$$(a,b) = f(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} |x|+y=a \\ x=b \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x=b \\ y=a-|b|. \end{cases}$$

Ce raisonnement montre que f est bijective de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que l'application $(a,b) \longmapsto \left(b,a-|b|\right)$ en est la réciproque.