INTRODUCTION À LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES (JE SAIS FAIRE)

✎ Je sais calculer les divisions euclidiennes de polynômes.

1 Calculer le reste de la division euclidienne de : $X^5 - X^2 + 3X^4 + 8X + 1$ par : $X^2 + 3X + 1$.

✎ Je sais calculer la partie entière d'une fraction rationnelle.

2 Calculer les parties entières des fractions : $\dfrac{2X+3}{4X^2+X+5}$, $\dfrac{3X^2+1}{X^2-X+2}$ et $\dfrac{X^4-X^3+X+7}{X^2+1}$.

✎ Je sais reconnaître la forme irréductible d'un polynôme sur $\mathbb{R}$.

3 Les polynômes : $X^2\big(X^2+X+1\big)(X+3)^2$ et $\big(X^2+3X+2\big)^3(X-1)$ sont-ils écrits sous forme irréductible sur $\mathbb{R}$?

✎ Je sais écrire la forme d'une décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ sans oublier la partie entière.

4 Écrire la forme de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles : $\dfrac{X^3+X^2+4}{X^2-1}$, $\dfrac{1}{\big(X^2+1\big)^2(X-1)}$ et $\dfrac{X}{X^3\big(X^2+X+2\big)(X+1)^2}$. Le calcul des coefficients n'est pas demandé.

✎ Je sais mettre en œuvre les quatre techniques de calcul des coefficients proposées dans le chapitre.

5 Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction : $\dfrac{X^2}{(X+1)^2\big(X^2+4\big)}$.

1 Correction des exercices

1 $X^5 - X^2 + 3X^4 + 8X + 1 = \left(X^2 + 3X + 1\right)\underbrace{\left(X^3 - X + 2\right)}_{\text{Quotient}} + \underbrace{3X - 1}_{\text{Reste}}.$

---

2 La fraction $\dfrac{2X+3}{4X^2+X+5}$ a pour partie entière : 0 car le degré de $2X+3$ est strictement inférieur au degré de $4X^2+X+5$.

La fraction $\dfrac{3X^2+1}{X^2-X+2}$ a pour partie entière : 3.

La fraction $\dfrac{X^4-X^3+X+7}{X^2+1}$ a pour partie entière : X^2-X-1.

---

3 L'écriture : $X^2\left(X^2+X+1\right)(X+3)^2$ est une forme irréductible sur $\mathbb{R}$ car X^2+X+1 n'a aucune racine réelle, ses racines sont j et $\overline{\mathrm{j}}$.

L'écriture : $\left(X^2+3X+2\right)^3(X-1)$ n'est pas une forme irréductible sur $\mathbb{R}$ car le polynôme X^2+3X+2 peut être décomposé davantage : $X^2+3X+2 = (X+1)(X+2)$.

---

4 Il existe :

— deux réels a et b pour lesquels : $\dfrac{X^3+X^2+4}{X^2-1} = X+1+\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{b}{X+1}$.

— cinq réels a,b,c,d,e pour lesquels : $\dfrac{1}{\left(X^2+1\right)^2(X-1)} = 0+\dfrac{aX+b}{\left(X^2+1\right)^2}+\dfrac{cX+d}{X^2+1}+\dfrac{e}{X-1}$.

— sept réels a,b,c,d,e,f,g pour lesquels : $\dfrac{X}{X^3\left(X^2+X+2\right)(X+1)^2} = 0+\dfrac{a}{X^3}+\dfrac{b}{X^2}+\dfrac{c}{X}+\dfrac{dX+e}{X^2+X+2}+\dfrac{f}{(X+1)^2}+\dfrac{g}{X+1}$.

---

5 $\dfrac{X^2}{(X+1)^2\left(X^2+4\right)} = 0+\dfrac{1}{5(X+1)^2}-\dfrac{8}{25(X+1)}+\dfrac{4(2X+3)}{25\left(X^2+4\right)}.$
