

INTRODUCTION À LA DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES (JE SAIS FAIRE)

 Je sais calculer les divisions euclidiennes de polynômes.

1 Calculer le reste de la division euclidienne de : $X^5 - X^2 + 3X^4 + 8X + 1$ par : $X^2 + 3X + 1$.

 Je sais calculer la partie entière d'une fraction rationnelle.

2 Calculer les parties entières des fractions : $\frac{2X + 3}{4X^2 + X + 5}$, $\frac{3X^2 + 1}{X^2 - X + 2}$ et $\frac{X^4 - X^3 + X + 7}{X^2 + 1}$.

 Je sais reconnaître la forme irréductible d'un polynôme sur \mathbb{R} .

3 Les polynômes : $X^2(X^2 + X + 1)(X + 3)^2$ et $(X^2 + 3X + 2)^3(X - 1)$ sont-ils écrits sous forme irréductible sur \mathbb{R} ?

 Je sais écrire la forme d'une décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} sans oublier la partie entière.

4 Écrire la forme de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{R} des fractions rationnelles : $\frac{X^3 + X^2 + 4}{X^2 - 1}$, $\frac{1}{(X^2 + 1)^2(X - 1)}$
et $\frac{X}{X^3(X^2 + X + 2)(X + 1)^2}$. Le calcul des coefficients n'est pas demandé.

 Je sais mettre en œuvre les quatre techniques de calcul des coefficients proposées dans le chapitre.

5 Calculer la décomposition en éléments simples de la fraction : $\frac{X^2}{(X + 1)^2(X^2 + 4)}$.

1 CORRECTION DES EXERCICES

$$1 \quad X^5 - X^2 + 3X^4 + 8X + 1 = (X^2 + 3X + 1) \underbrace{(X^3 - X + 2)}_{\text{Quotient}} + \underbrace{3X - 1}_{\text{Reste}}.$$

2 La fraction $\frac{2X+3}{4X^2+X+5}$ a pour reste : 0 car le degré de $2X+3$ est strictement inférieur au degré de $4X^2+X+5$.

La fraction $\frac{3X^2+1}{X^2-X+2}$ a pour reste : 3.

La fraction $\frac{X^4-X^3+X+7}{X^2+1}$ a pour reste : X^2-X-1 .

3 L'écriture : $X^2(X^2+X+1)(X+3)^2$ est une forme irréductible sur \mathbb{R} car X^2+X+1 n'a aucune racine réelle, ses racines sont j et \bar{j} .

L'écriture : $(X^2+3X+2)^3(X-1)$ n'est pas une forme irréductible sur \mathbb{R} car le polynôme X^2+3X+2 peut être décomposé davantage : $X^2+3X+2 = (X+1)(X+2)$.

4 Il existe :

— deux réels a et b pour lesquels : $\frac{X^3+X^2+4}{X^2-1} = X+1 + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}$.

— cinq réels a, b, c, d, e pour lesquels : $\frac{1}{(X^2+1)^2(X-1)} = 0 + \frac{aX+b}{(X^2+1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{e}{X-1}$.

— sept réels a, b, c, d, e, f, g pour lesquels : $\frac{X}{X^3(X^2+X+2)(X+1)^2} = 0 + \frac{a}{X^3} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X} + \frac{dX+e}{X^2+X+2} + \frac{f}{(X+1)^2} + \frac{g}{X+1}$.

$$5 \quad \frac{X^2}{(X+1)^2(X^2+4)} = 0 + \frac{1}{5(X+1)^2} - \frac{8}{25(X+1)} + \frac{4(2X+3)}{25(X^2+4)}.$$
