LIMITE D'UNE SUITE (JE SAIS FAIRE)

1 GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES RÉELLES

✎ Je sais écrire avec des quantificateurs la définition d'une suite majorée/minorée/bornée. Je sais qu'un majorant/minorant ne doit pas dépendre de la variable n.

✎ Je sais écrire avec des quantificateurs la définition d'une suite (strictement) croissante/décroissante.

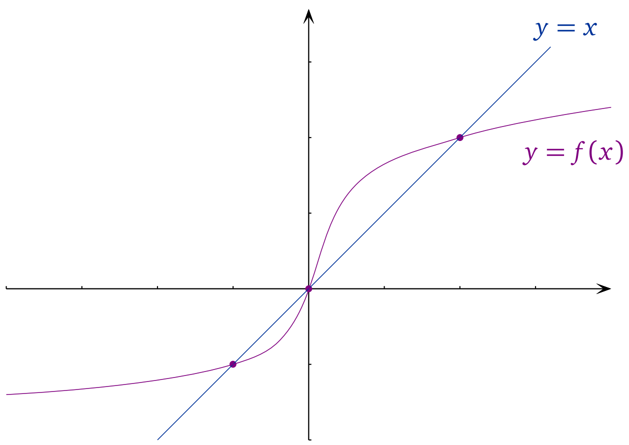
1 Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ est décroissante de deux manières différentes.

2 Écrire avec des quantificateurs les propositions : « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 5 à partir d'un certain rang » et « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang ».

✎ Je sais que pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ du type « $u_{n+1} = f(u_n)$ » :

f est croissante $\not\Longrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et : f est décroissante $\not\Longrightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3 On note f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ représentée ci-dessous. Étudier rapidement de tête, en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$, la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_{n+1} = f(u_n)$.



2 LIMITE D'UNE SUITE RÉELLE DANS $\overline{\mathbb{R}}$

✎ Je sais écrire rapidement les trois définitions de la limite d'une suite.

✎ Je sais définir et distinguer les prédicats « converger », « diverger » et « avoir une limite ».

✎ Je sais utiliser la définition de la limite dans des cas concrets simples — majorations/minorations et utilisation finale de la partie entière.

4 Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(3-\sin n) = +\infty$ en revenant à la définition de la limite.

✎ Je sais calculer des sommes, des produits et des quotients de limites et je maîtrise parfaitement les formes indéterminées.

5 Donner un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, mais pour lesquelles : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 7$. Même question en remplaçant « 7 » par « $+\infty$ », puis par « 0 ».

6 Rappeler quel exemple privilégié nous parle de la forme indéterminée « $1^{+\infty}$ ».

✎ Je sais énoncer le théorème du cours qui concerne les inégalités strictes et celui qui concerne les inégalités larges, et je ne les confonds pas.

7 On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par : $u_n = 2^n$. Les suites suivantes sont-elles extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

$$\left(2^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \left(2^{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad \left(4^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

3 Théorèmes d'existence de limites

✎ Je sais que le théorème d'encadrement est d'abord un théorème d'existence. Je ne le confonds pas avec un simple passage à la limite, dans lequel on sait toujours déjà que les limites existent.

8 Étudier : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor \sqrt{2n} \rfloor}{\sqrt{n}+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\left(n^2\right)}{n}$.

✎ Je sais calculer la limite d'une suite géométrique en distinguant les cas qui s'imposent.

✎ Je sais que le théorème de la limite monotone est d'abord un théorème d'existence. Je sais en outre qu'une suite croissante majorée n'a aucune raison de converger vers le majorant que j'ai trouvé.

✎ Je sais définir la notion de suites adjacentes et je sais énoncer le théorème des suites adjacentes.

4 Suites récurrentes définies par une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

✎ Je sais définir la notion de partie stable par une fonction et j'en ai compris l'importance pour l'existence des suites récurrentes « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

9 Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n - 1}$.

✎ Je sais énoncer les divers résultats donnés en cours à propos de la monotonie d'une suite récurrente « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

10 On peut montrer que la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} \dfrac{x^2}{2} - 3x + 4$ est croissante sur $[3, +\infty[$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ n'est pourtant pas monotone. Comment l'expliquer ?

5 Bornes supérieures/inférieures, densité et limites

✎ Je sais énoncer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure et la caractérisation séquentielle de la densité.

11 Calculer les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble : $\left\{\dfrac{a-b}{2a+b}\right\}_{a,b\in\mathbb{N}^*}$.

6 Extension aux suites complexes

✎ Je sais quelles définitions et quels théorèmes sur les suites réelles peuvent être étendus aux suites complexes.

✎ Je sais énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass.

7 Vrai ou faux ?

12 Vrai ou faux ? Justifier.

1) Toute suite bornée est convergente.
2) L'intervalle $[0, 3]$ est stable par la fonction $x \longmapsto 1 + \dfrac{x^2}{9}$.
3) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Alors : $f\left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n)$.

4) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, alors au moins l'une des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge aussi.

5) Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction. La fonction $f\circ f$ possède un et un seul point fixe si et seulement si c'est le cas pour f.

6) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ le sont.

7) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, alors la suite $\big(\sin u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

8 CORRECTION DES EXERCICES

1 **Première preuve :** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} - \dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2^n}{(n+1)!}\big(2-(n+1)\big) = -\dfrac{2^n(n-1)}{(n+1)!} \leqslant 0.$

Deuxième preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > 0$ — à ne pas oublier ! — et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \leqslant 1.$$

---

2 Dire que : « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 5 à partir d'un certain rang », c'est dire que : $\exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \leqslant 5.$

Dire que : « $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang », c'est dire que : $\exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \geqslant N, \quad u_{n+1} \leqslant u_n.$

---

3 Le raisonnement qui suit est un peu long, mais il peut vraiment être mené pas à pas de tête. Essayez !

Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. La croissance de f et les points fixes repérés sur son graphe nous permettent en outre d'affirmer que les intervalles $]-\infty,-1]$, $]-1,0[$, $\{0\}$, $]0,2[$ et $[2,+\infty[$ sont stables par f.

- **Cas où** $u_0 \in]-\infty,-1]$ **:** L'intervalle $]-\infty,-1]$ étant stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par -1. En outre, comme : $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in]-\infty,-1]$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Croissante majorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f dans $]-\infty,-1]$, forcément -1.
- **Cas où** $u_0 \in]-1,0[$ **:** L'intervalle $]-1,0[$ étant stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée entre -1 et 0. En outre, comme : $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in]-1,0[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Déroissante minorée de premier terme strictement négatif, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe strictement négatif de f, forcément -1.
- **Cas où** $u_0 = 0$ **:** Constante de valeur 0, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- **Cas où** $u_0 \in]0,1[$ **:** L'intervalle $]0,1[$ étant stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée entre 0 et 1. En outre, comme : $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \in]0,1[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Croissante majorée de premier terme strictement positif, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe strictement positif de f, forcément 1.
- **Cas où** $u_0 \in [1,+\infty[$ **:** L'intervalle $[1,+\infty[$ étant stable par f, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1. En outre, comme : $f(x) \leqslant x$ pour tout $x \in [1,+\infty[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Décroissante minorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f dans $[1,+\infty[$, forcément 1.

4

- Montrons que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geqslant 2$: $\left|\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}\right| = \dfrac{\sqrt{n}}{n-1} \leqslant \dfrac{\sqrt{n}+1}{n-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.
  Posons alors : $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1$. Pour tout $n \geqslant N$: $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$, donc : $\left|\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}\right| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$.
- Montrons que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2(3-\sin n) = +\infty$. Soit $A > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n^2(3-\sin n) \geqslant 2n^2$. Posons donc : $N = \left\lfloor \sqrt{\dfrac{A}{2}} \right\rfloor + 1$. Pour tout $n \geqslant N$: $n > \sqrt{\dfrac{A}{2}}$, donc : $n^2(3-\sin n) \geqslant 2n^2 > A$.

---

5 Tout d'abord : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{7}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$, mais : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{7}{n}\right) \times (-n) = 7.$

Ensuite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \big(-n^2\big) = -\infty$, mais : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n}\right) \times \big(-n^2\big) = +\infty.$

Enfin : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (-n) = -\infty$, mais : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{n^2}\right) \times (-n) = 0.$

---

6 Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, et on peut vérifier que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} = 0.$

---

7 La suite $\left(2^{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour extractrice φ la fonction $n \longmapsto n^2$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

La suite $\left(2^{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ **N'est PAS** extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car aucune puissance **ENTIÈRE** de 2 ne vaut $2^{\sqrt{2}}$. En d'autres termes, la fonction $n \longmapsto \sqrt{n}$ ne peut servir d'extractrice car elle n'est pas définie de $\mathbb{N}$ **DANS** $\mathbb{N}$.

La suite $\left(4^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ avec pour extractrice φ la fonction $n \longmapsto 2n$ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

8

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{\sqrt{2n}-1}{\sqrt{n}+1} \leqslant \dfrac{\left\lfloor\sqrt{2n}\right\rfloor}{\sqrt{n}+1} \leqslant \dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n}+1} \leqslant \sqrt{2}$, et même : $\sqrt{2} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2n}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}} \leqslant \dfrac{\left\lfloor\sqrt{2n}\right\rfloor}{\sqrt{n}+1} \leqslant \sqrt{2}$, donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\left\lfloor\sqrt{2n}\right\rfloor}{\sqrt{n}+1} = \sqrt{2}$.
- La suite $\left(\sin\left(n^2\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(n^2\right)}{n} = 0$.

---

9 Il s'agit juste de trouver un intervalle à la fois stable par $x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x-1}$ et contenant 2. On peut vérifier que l'intervalle $[2,+\infty[$ convient.

---

10 L'intervalle $[3,+\infty[$ **N'est PAS** stable par f ! Par exemple : $f(3) = -\dfrac{1}{2} \notin [3,+\infty[$.

---

11 Notons $\mathscr{A}$ l'ensemble $\left\{\dfrac{a-b}{2a+b}\right\}_{a,b\in\mathbb{N}^*}$. Pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{a-b}{2a+b} \leqslant \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$, donc $\mathscr{A}$ est majoré par $\dfrac{1}{2}$. Ensuite : $\dfrac{n-1}{2n+1} \in \mathscr{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2n+1} = \frac{1}{2}$. Conclusion : $\sup \mathscr{A} = \dfrac{1}{2}$.

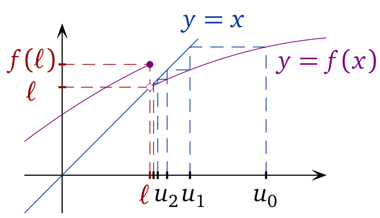
Pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{a-b}{2a+b} \geqslant \dfrac{-b}{2a+b} \geqslant -\dfrac{b}{b} = -1$, donc $\mathscr{A}$ est minoré par -1. Ensuite : $\dfrac{1-n}{2+n} \in \mathscr{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n}{2+n} = -1$. Conclusion : $\inf \mathscr{A} = -1$.

12

1) Faux, pensez par exemple à la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. La réciproque est vraie en revanche.

2) Vrai. Pour tout $x \in [0,3]$: $x^2 \in [0,9]$ donc : $\dfrac{x^2}{9} \in [0,1]$, et enfin : $1 + \dfrac{x^2}{9} \in [1,2] \subset [0,3]$.

3) Faux. Le résultat cité n'est rien de plus que le théorème « $f(\ell) = \ell$ » du cours sur les suites récurrentes, mais il faut donc supposer que f est **CONTINUE EN** ℓ. Sur la figure ci-dessous : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ mais : $f(\ell) \neq \ell$.



4) Vrai. Par contraposition, la somme de deux suites convergentes est une suite convergente.

5) Faux.

- Les points fixes de f sont aussi des points fixes de $f \circ f$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x$:
$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = f(x) = x.$$
Il découle de cette observation que si $f \circ f$ possède un et un seul point fixe, alors f aussi.
- La réciproque est fausse. Les points fixes de $f \circ f$ ne sont pas forcément des points fixes de f. La fonction $x \overset{f}{\longmapsto} -x$, par exemple, admet 0 pour seul point fixe, pourtant la fonction $f \circ f$ correspondante n'est autre que la fonction identité $x \longmapsto x$ dont tout réel est point fixe...

6) Faux. Il est vrai que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, c'est aussi le cas des deux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, mais la réciproque est fausse comme le prouve l'exemple de la suite $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Le résultat devient vrai en revanche si on impose aux suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ d'avoir la **MÊME LIMITE**.

7) Faux, par exemple : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\pi = +\infty$ mais : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin(n\pi) = 0$.