LIMITES D'UNE FONCTION (JE SAIS FAIRE)

1 On peut souvent se donner rapidement une bonne idée de la valeur d'une limite en raisonnant sur celle-ci en termes d'approximation « $\approx$ ». Ce genre d'approche informelle fournit une **TRAME** de preuve, mais **NE** constitue **JAMAIS** une preuve à proprement parler. Pour une preuve propre, les techniques usuelles sont de rigueur : mise en facteur du terme dominant, mise en évidence de taux d'accroissements usuels, quantité conjuguée...

Quelques exemples :

— lorsque x tend vers $+\infty$: $\sqrt{x^2+x} \approx \sqrt{x^2} = x$, $\quad \dfrac{2x^3-x+1}{x^4-x^2+2} \approx \dfrac{2x^3}{x^4} \approx \dfrac{2}{x}$ $\quad$ et $\quad \ln\left(x^2+1\right) \approx 2\ln x$,

— lorsque x tend vers 0 : $\sin x \approx x$ $\quad$ et $\quad e^x - 1 \approx x$ $\quad$ car : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ $\quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$.

Avant de calculer proprement chacune des limites suivantes, on essaiera d'en prévoir la valeur rapidement au moyen du symbole « $\approx$ ».

1) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x}\right)$. $\qquad$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{e^{2x}+x} - e^x\right)$.

2) a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{e^x+x^2}}$. $\qquad$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 + x\ln(e^x+x)}{\sqrt{x^4+1}}$.

3) a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{\tan(2x)}$. $\qquad$ **b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)-x^2}{(\operatorname{Arctan} x)^2}$. $\qquad$ **c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x^x-1}$.

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{x^\beta+1}$ $\quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

> ✎ Je sais interpréter la définition générale de la limite en termes de voisinages. Je sais écrire sans délai et dans toute situation la définition quantifiée de la limite d'une fonction en un point, y compris pour des limites à gauche/à droite.

2 Écrire avec des quantificateurs la définition des limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. $\qquad$ **2)** $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$. $\qquad$ **3)** $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. $\qquad$ **4)** $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$.

> ✎ Je sais que si une fonction possède une limite en un point, elle est bornée au voisinage de ce point, et seulement au voisinage de ce point a priori.

3 Redémontrer le résultat de cours suivant. Soient D une partie de $\mathbb{R}$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à D et $M \in \mathbb{R}$. Si : $\displaystyle\lim_a f < M$, $\quad$ alors : $\quad f(x) < M \quad$ au voisinage de a.

> ✎ Je sais énoncer la caractérisation séquentielle de la limite.

4 Montrer que la fonction $x \longmapsto \cos\left(x^2\right)$ ne possède pas de limite en $+\infty$.

> ✎ Je sais énoncer utiliser le théorème d'encadrement/minoration/majoration. J'ai compris que ce théorème est un théorème d'existence de limite bien distinct du théorème de passage à la limite dans une inégalité.

5 Calculer : $\qquad$ **1)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\cos x}{x+\sin x}$. $\qquad$ **2)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\lfloor x\ln x\rfloor}{\sqrt[3]{x^6+x}}$.

✎ Je sais énoncer le théorème de la limite monotone et j'ai ce théorème dans un coin de ma tête chaque fois que, dans un contexte un peu abstrait, un problème de limite m'est posé pour une fonction monotone.

6 Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On suppose que f est périodique, que $f+g$ est monotone et que : $\lim\limits_{+\infty} g = 0$.

1) Montrer que f est constante.

2) Montrer que g est de signe constant.

1 Correction des exercices

1

1) a) Au brouillon : $\overbrace{\sqrt{x^2+1}}^{\approx x}-\sqrt{x} \approx x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$ Et maintenant, proprement :

$$\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x} = x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\times(1-0)=+\infty.$$

b) Au brouillon : $\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+x} \approx \sqrt{\mathrm{e}^{2x}} \approx \mathrm{e}^x$, donc nous sommes bien embêtés. Contrairement à ce qui s'est passé en **a)**, les deux termes que nous soustrayons ici ont le même ordre de grandeur, aucun des deux ne l'emporte sur l'autre. Ils se neutralisent et disparaissent, mais l'issue du combat n'est donc pas claire, car que reste-t-il en fin de compte ? Nous allons devoir la jouer fine, ici en exploitant une quantité conjuguée.

$$\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+x}-\mathrm{e}^x = \frac{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+x}^{\,2}-(\mathrm{e}^x)^2}{\sqrt{\mathrm{e}^{2x}+x}+\mathrm{e}^x} = \frac{x}{\mathrm{e}^x\left(\sqrt{1+x\mathrm{e}^{-2x}}+1\right)} = \frac{x}{\mathrm{e}^x}\times\frac{1}{\sqrt{1+x\mathrm{e}^{-2x}}+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\times\frac{1}{\sqrt{1}+1}=0$$

Une remarque en passant. Les quantités conjuguées sont bien pratiques… tant qu'on n'a pas de développements limités. Le chapitre « Analyse asymptotique de niveau 1 » les rendra plus ou moins inutiles, mais patience !

2) a) Au brouillon : $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+x^2}} \approx \dfrac{\frac{\mathrm{e}^x}{2}}{\sqrt{\mathrm{e}^x}} \approx \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$ Et maintenant, proprement :

$$\frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\mathrm{e}^x+x^2}} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}}\times\frac{\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{2}}{\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{-x}}} = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\times\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{2\sqrt{1+x^2\mathrm{e}^{-x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\times\frac{1}{2\sqrt{1}}=+\infty.$$

b) Au brouillon : $\dfrac{x^2+x\overbrace{\ln(\mathrm{e}^x+x)}^{\approx \ln(\mathrm{e}^x)\approx x}}{\sqrt{x^4+1}} \approx \dfrac{2x^2}{\sqrt{x^4}} \approx \dfrac{2x^2}{x^2} \approx 2 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2.$ Et maintenant, proprement :

$$\frac{x^2+x\ln(\mathrm{e}^x+x)}{\sqrt{x^4+1}} = \frac{x^2+x\left(x+\ln(1+x\mathrm{e}^{-x})\right)}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = \frac{2+\frac{\ln(1+x\mathrm{e}^{-x})}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2+0}{\sqrt{1}}=2.$$

3) a) Au brouillon : $\dfrac{\ln(1+x)}{\tan(2x)} \approx \dfrac{x}{2x} \approx \dfrac{1}{2} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \dfrac{1}{2}.$ Et maintenant, proprement :

$$\frac{\ln(1+x)}{\tan(2x)} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{x}}{2\times\frac{\tan(2x)}{2x}} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{\ln'(1)}{2\times\tan'(0)}=\frac{1}{2}.$$

b) Au brouillon : $\dfrac{\overbrace{\sin(3x)}^{\approx 3x}-x^2}{(\operatorname{Arctan} x)^2} \approx \dfrac{3x}{x^2} \approx \dfrac{3}{x}$, donc **pas de limite !** Eh oui : $\dfrac{1}{0}\neq+\infty$ contrairement à ce que vous vous imaginez souvent. Ici, limite à gauche et limite à droite existent mais ne sont pas égales. Et maintenant, proprement :

$$\frac{\sin(3x)-x^2}{(\operatorname{Arctan} x)^2} = \frac{3\times\frac{\sin(3x)}{3x}-x}{\left(\frac{\operatorname{Arctan} x}{x}\right)^2\times x}.$$

Le numérateur tend vers 3 quand x tend vers 0, mais : $\displaystyle\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(3x)-x^2}{(\operatorname{Arctan} x)^2}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^-}\frac{\sin(3x)-x^2}{(\operatorname{Arctan} x)^2}=-\infty.$

c) Au brouillon : $\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x^x-1} = \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^{x\ln x}-1} \approx \dfrac{x}{x\ln x} \approx \dfrac{1}{\ln x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0.$ Il a été crucial ici, au dénominateur, que $x\ln x$ tende vers 0 lorsque x tend vers 0. Et maintenant, proprement :

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x^x-1} = \frac{\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}}{\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}\times\ln x} \underset{x\to0}{\longrightarrow} \frac{1}{1\times(-\infty)}=0.$$

4) Préliminaire fondamental : Pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$: $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} x^\gamma = \begin{cases} +\infty & \text{si :} \quad \gamma > 0 \\ 1 & \text{si :} \quad \gamma = 0 \\ 0 & \text{si :} \quad \gamma < 0. \end{cases}$

À présent, soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En vue de **COMPARER** x^β **ET 1 AU DÉNOMINATEUR**, nous allons devoir distinguer trois cas : $\beta > 0$, $\quad \beta = 0 \quad$ et $\quad \beta < 0$.

— **Cas où $\beta > 0$:** Au brouillon : $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta + 1} \approx \dfrac{x^\alpha}{x^\beta} \approx x^{\alpha-\beta}$. Et maintenant, proprement :

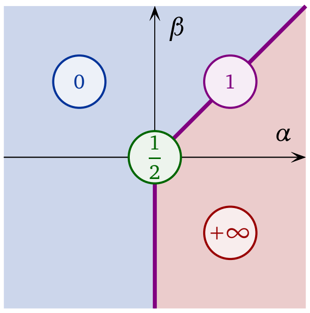
$$\frac{x^\alpha}{x^\beta + 1} = \frac{x^{\alpha-\beta}}{1 + x^{-\beta}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si :} \quad \alpha > \beta \\ 1 & \text{si :} \quad \alpha = \beta \\ 0 & \text{si :} \quad \alpha < \beta. \end{cases}$$

— **Cas où $\beta = 0$:** $\displaystyle \frac{x^\alpha}{x^\beta + 1} = \frac{x^\alpha}{2} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si :} \quad \alpha > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si :} \quad \alpha = 0 \\ 0 & \text{si :} \quad \alpha < 0. \end{cases}$

— **Cas où $\beta < 0$:** Au brouillon : $\dfrac{x^\alpha}{x^\beta + 1} \approx x^\alpha$. Et maintenant, proprement :

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta + 1} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} +\infty & \text{si :} \quad \alpha > 0 \\ 1 & \text{si :} \quad \alpha = 0 \\ 0 & \text{si :} \quad \alpha < 0. \end{cases}$$

La figure ci-dessous résume les différentes valeurs que la limite étudiée peut prendre en fonction de α et β.



---

2 Ci-dessous, la fonction f étudiée est définie sur une certaine partie D de $\mathbb{R}$.

1) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, B > 0, \quad \forall x \in D, \qquad x > B \implies \big|f(x) - 1\big| < \varepsilon.$

2) $\forall A < 0, \quad \exists\, \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad |x - 1| < \alpha \implies f(x) < A.$

3) $\forall A > 0, \quad \exists\, B < 0, \quad \forall x \in D, \qquad x < B \implies f(x) > A.$

4) $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, \alpha > 0, \quad \forall x \in D, \qquad 1 < x < 1 + \alpha \implies \big|f(x) - 2\big| < \varepsilon.$

---

3 Posons : $\quad \ell = \lim\limits_{x} f$. $\quad$ A priori : $\quad \ell \in [-\infty, M[$.

— Si : $\quad \ell = -\infty$, $\quad$ la définition de la limite appliquée au voisinage $]-\infty, M[$ de ℓ affirme l'existence d'un voisinage V_a de a pour lequel : $\quad \forall x \in D \cap V_a, \quad f(x) \in]-\infty, M[$. $\quad$ Comme voulu, pour tout $x \in D \cap V_a$: $\quad f(x) < M$.

— Si : $\quad \ell\ ]-\infty, M[$, $\quad$ la définition de la limite appliquée au réel strictement positif $\varepsilon = M - \ell$ affirme l'existence d'un voisinage V_a de a pour lequel : $\quad \forall x \in D \cap V_a, \quad \big|f(x) - \ell\big| < M - \ell$. $\quad$ Comme voulu, pour tout $x \in D \cap V_a$: $f(x) < \ell + (M - \ell) = M$.

---

4 Il nous suffit d'exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ pour lesquelles les suites $\big(\cos\big(u_n^2\big)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(\cos\big(v_n^2\big)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont pas la même limite.

— Première suite : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2n\pi} = +\infty \quad$ et $\quad \cos\left(\sqrt{2n\pi}^{\,2}\right) = \cos(2n\pi) = 1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$

— Deuxième suite : $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} \sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = +\infty \quad$ et $\quad \cos\left(\sqrt{2n\pi + \frac{\pi}{2}}^{\,2}\right) = \cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

---

5 On peut effectuer ici des encadrements « à la main », mais il est plus efficace d'utiliser le théorème d'encadrement sous la forme suivante — le produit d'une fonction bornée au voisinage de a et d'une fonction de limite nulle en a est une fonction de limite nulle en a.

1) Au brouillon : $\dfrac{x^2-\cos x}{x+\sin x} \approx \dfrac{x^2}{x} \approx x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Et maintenant, proprement :

$$\frac{x^2-\cos x}{x+\sin x} = x \times \frac{1-\dfrac{\cos x}{x^2}}{1+\dfrac{\sin x}{x}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \times \frac{1}{1} = +\infty.$$

2) Au brouillon : $\dfrac{x^2+\overbrace{\lfloor x\ln x\rfloor}^{\approx x\ln x}}{\sqrt[3]{x^6+x}} \approx \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x^6}} \approx \dfrac{x^2}{x^2} \approx 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Et maintenant, proprement :

$$\frac{x^2+\lfloor x\ln x\rfloor}{\sqrt[3]{x^6+x}} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{1+\dfrac{\lfloor x\ln x\rfloor}{x\ln x}\times\dfrac{\ln x}{x}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^5}}} = \frac{1+\dfrac{\lfloor x\ln x\rfloor}{x\ln x}\times\dfrac{\ln x}{x}}{\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^5}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt[3]{1}} = 1.$$

Il faut bien sûr avoir en tête ici que la fonction $x \longmapsto \dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ est bornée entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

6

1) La fonction $f+g$ est monotone, donc possède une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$, or : $\lim\limits_{+\infty} g = 0$, donc :

$$f = (f+g)-g \underset{+\infty}{\longrightarrow} \ell - 0 = \ell.$$

Pour montrer que f est constante, fixons à présent $x \in \mathbb{R}$. Notons $T>0$ une période de f. Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(x) = f(x+nT) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc d'une part ℓ est un réel, et d'autre part : $f(x)=\ell$.

2) La fonction $f+g$ est monotone et f est constante d'après **1)**, donc $g=(f+g)-f$ est monotone à son tour. Comme : $\lim\limits_{+\infty} g = 0$, il en découle que g est de signe constant — positive si g est décroissante, négative si g est croissante.
