Nombres complexes et trigonométrie (je sais faire)

1 Fonctions cosinus, sinus et tangente

1 Vrai ou faux ? Justifier.

1) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y\ [2\pi] \implies x \equiv y\ [\pi]$.
2) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y\ [\pi] \implies x \equiv y\ [2\pi]$.
3) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 2x \equiv 2y\ [2\pi] \implies x \equiv y\ [\pi]$.
4) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \equiv y\ [\pi] \implies 2x \equiv 2y\ [\pi]$.
5) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad 2x \equiv 2y\ [\pi] \implies x \equiv y\ [\pi]$.

✎ Je sais tracer l'allure des graphes des fonctions cos, sin et tan et je connais par cœur les valeurs usuelles de ces fonctions, y compris pour tan.

2 Déterminer de tête les valeurs de : $\sin\frac{7\pi}{2}$, $\cos\frac{5\pi}{6}$, $\sin\frac{3\pi}{4}$, $\cos\left(-\frac{8\pi}{3}\right)$ et $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

✎ Je sais dériver les fonctions cos, sin et tan. Je sais que la formule de dérivation de tan permet de calculer une tangente à partir d'un cosinus et vice versa.

✎ Je sais résoudre les équations : $\cos x = \cos y$, $\sin x = \sin y$ et $\tan x = \tan y$, et je sais visualiser sur une figure pourquoi le résultat est vrai.

3 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$: $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$ et $\sin(2x) = \sin(3x)$.

✎ Je sais retrouver de tête sur un dessin les formes simplifiées des expressions du genre : $\sin(x+\pi)$, $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin(\pi - x)$...

4 On peut résumer la 2π-périodicité du (co)sinus en disant que « la fonction $x \longmapsto x + 2\pi$ préserve le (co)sinus ». Quelle autre transformation importante préserve le cosinus ? le sinus ? Quelle transformation importante transforme le sinus en cosinus et vice versa ?

5 Simplifier $\cos(x + 17\pi)$ et $\sin\big(x + n(n+1)\pi\big)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

✎ Je sais par cœur les développements : $\sin(x \pm y)$, $\tan(x \pm y)$... Je sais retrouver rapidement les développements correspondants pour : $\sin x \cos y$, $\cos x \cos y$... Je sais enfin par cœur les formules de duplication et je sais exprimer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.

2 Fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente

✎ Je sais définir les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan. J'ai compris l'importance du domaine de référence grâce auquel chacune de ces fonctions est définie.

6 Pour quelles valeurs de x les relations : $\operatorname{Arcsin} \sin x = x$ et $\sin \operatorname{Arcsin} x = x$ sont-elles vraies ? Même question avec les fonctions cos/Arccos et tan/Arctan.

7 Simplifier $\operatorname{Arccos} \cos \frac{29\pi}{6}$ et $\operatorname{Arcsin} \sin \frac{17\pi}{6}$.

✎ Je sais tracer l'allure des graphes des fonctions Arcsin, Arccos et Arctan.

✎ Je sais dériver les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan et je sais sur quels domaines elles sont dérivables.

8 Les fonctions Arcsin et Arccos ont les mêmes dérivées au signe près. Quelle interprétation géométrique ?

3 Exponentielle complexe et formes trigonométriques

✎ Je sais placer sur le cercle trigonométrique les nombres classiques du genre : $e^{\frac{i\pi}{2}}$, $e^{\frac{2i\pi}{3}}$...

9 Donner de tête les solutions des équations : $e^{i\theta} = 1$, $e^{i\theta} = i$ et $e^{i\theta} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

✎ Je sais énoncer les formules d'Euler et Moivre. Je sais linéariser et dé-linéariser les expressions trigonométriques.

10 Donner un argument des nombres complexes : -7, $5i$, $i+\sqrt{3}$ et $\frac{i}{1+i}$.

✎ Je sais exprimer x et y en fonction de r et θ dans le cas où : $x+iy = re^{i\theta}$, ainsi que r et θ en fonction de x et y.

11 Donner un argument de $-2-3i$ sous la forme d'une arctangente, d'un arccosinus et d'un arcsinus.

✎ Je sais définir e^z pour tout $z \in \mathbb{C}$ et je sais calculer le module et un argument d'une telle exponentielle.

12 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $e^z = i$ et $e^z = 1+2i$.

✎ Je sais transformer $a\cos x + b\sin x$ en $A\cos(x+\varphi)$ ou $A\sin(x+\varphi)$.

13 Proposer des valeurs de A et φ pour lesquelles pour tout $x \in \mathbb{R}$:

1) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = A\sin(x+\varphi)$. **2)** $3\cos x + 4\sin x = A\cos(x+\varphi)$.

✎ Je sais mettre en œuvre la technique de l'angle moitié et je sais l'utiliser pour factoriser les expressions du type : $\cos x + \cos y$, $\sin x - \sin y$...

✎ Je sais factoriser les sommes du genre $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx+y)$.

✎ Je sais définir le nombre complexe j et énoncer ses propriétés usuelles.

14 Exprimer en fonction de j les nombres j^{442} et $\left(3\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1\right)(\mathrm{j}+2)$.

✎ Je sais définir l'ensemble $\mathbb{U}_n$ et décrire ses éléments. Je sais calculer les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe donné sous forme trigonométrique. Je sais que la notation $\sqrt[n]{z}$ n'a de sens que si z est un réel positif.

15 Déterminer les racines cubiques de 8i.

4 Interprétation géométrique des nombres complexes

✎ Je sais décrire géométriquement le passage d'un nombre complexe z aux nombres complexes $z+u$, λz avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mathrm{e}^{i\theta} z$, et plus généralement $az+b$.

16 Décrire géométriquement les transformations $z \longmapsto -\mathrm{i}z$ et $z \longmapsto 3+2\mathrm{i}z$.

17 Déterminer pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'image z' de z par la rotation de centre $2+3\mathrm{i}$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

5 Je sais repérer et corriger une erreur

Corriger, partout où c'est nécessaire, le calcul ou raisonnement suivant.

18 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}-1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1} = \frac{\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}-1\right)\left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}-1\right)}{\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1\right|^2} = \frac{2-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}}{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\right)\right|^2}$$
$$= \frac{1-\cos(2\theta)}{2\cos^2\theta}.$$

19 Pour tous $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{n} = \sum_{k=1}^n \mathrm{Re}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^n e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

Or $\dfrac{2\pi}{n} \in]0,\pi[$, donc $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$, donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^n \cos^2 \frac{k\pi}{n} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2ik\pi}-1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}\right) = \mathrm{Re}(0) = 0.$

20 On cherche à résoudre l'équation $\mathrm{Re}(z^3) = i + \mathrm{Im}(z^3)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}(z^3) = i + \mathrm{Im}(z^3) \iff \frac{z^3+\overline{z}^3}{2} = i + \frac{z^3-\overline{z}^3}{2} \iff \overline{z}^3 = i \iff \overline{z} = -i \iff z = i.$$

6 Correction des exercices

1

1) Vrai. Si $x=y+2k\pi$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$: $\quad x=y+k'\pi\quad$ pour $k'=2k$, qui est bien un entier.
2) Faux. Si $x=y+k\pi$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$, rien ne garantit que k est pair. Par exemple : $\quad 0\equiv\pi\ [\pi]\quad$ mais : $0\not\equiv\pi\ [2\pi]$.
3) Vrai. Si $2x=2y+2k\pi$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$: $\quad x=y+k\pi,\quad$ tout simplement !
4) Vrai. Si $x=y+k\pi$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$: $\quad 2x=2y+2k\pi=2y+k'\pi\quad$ pour $k'=2k$, qui est bien un entier.
5) Faux. Si $2x=2y+k\pi$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$, rien ne garantit que k est pair. Par exemple : $\quad 2\times\dfrac{\pi}{2}\equiv 2\times 0\ [\pi]$ mais : $\quad\dfrac{\pi}{2}\not\equiv 0\ [\pi]$.

---

2 $\sin\dfrac{7\pi}{2}=-1,\quad \cos\dfrac{5\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \sin\dfrac{3\pi}{4}=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\quad \cos\left(-\dfrac{8\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}\quad$ et $\quad\tan\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

---

3 Pour tout $x\in[0,2\pi[$:

$$\begin{aligned}\cos(2x)=-\frac{1}{2}\quad&\iff\quad \cos(2x)=\cos\frac{2\pi}{3}\\ &\iff\quad 2x\equiv\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\quad\text{ou}\quad 2x\equiv-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\\ &\iff\quad x\equiv\frac{\pi}{3}\ [\pi]\quad\text{ou}\quad x\equiv-\frac{\pi}{3}\ [\pi]\\ &\iff\quad x\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}\quad\text{ou}\quad x\in\left\{\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}\quad\iff\quad x\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sin(2x)=\sin(3x)\quad&\iff\quad 2x\equiv 3x\ [2\pi]\quad\text{ou}\quad 2x\equiv\pi-3x\ [2\pi]\\ &\iff\quad x\equiv 0\ [2\pi]\quad\text{ou}\quad x\equiv\frac{\pi}{5}\left[\frac{2\pi}{5}\right]\\ &\overset{x\in[0,2\pi[}{\iff}\quad x=0\quad\text{ou}\quad x\in\left\{\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\pi,\frac{7\pi}{5},\frac{9\pi}{5}\right\}\quad\iff\quad x\in\left\{0,\frac{\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\pi,\frac{7\pi}{5},\frac{9\pi}{5}\right\}.\end{aligned}$$

---

4 La fonction $x\longmapsto -x$ préserve le cosinus par parité : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad\cos(-x)=\cos x$.
La fonction $x\longmapsto\pi-x$ préserve quant à elle le sinus : $\quad\forall x\in\mathbb{R},\quad\sin(\pi-x)=\sin x$.
La fonction $x\longmapsto\dfrac{\pi}{2}-x$ transforme les sinus en cosinus et vice versa :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x\quad\text{et}\quad\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.$$

---

5 Pour tous $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{Z}$: $\quad\cos(x+17\pi)=-\cos x\quad$ et $\quad\sin\big(x+n(n+1)\pi\big)=\sin x\quad$ car $n(n+1)$, produit de deux entiers consécutifs, est pair.

---

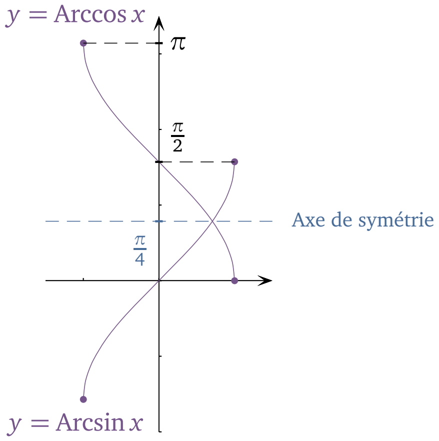
6 Pour tout $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$: $\quad\mathrm{Arcsin}\,\sin x=x\quad$ et pour tout $x\in[-1,1]$: $\quad\sin\mathrm{Arcsin}\,x=x$.
Pour tout $x\in[0,\pi]$: $\quad\mathrm{Arccos}\,\cos x=x\quad$ et pour tout $x\in[-1,1]$: $\quad\cos\mathrm{Arccos}\,x=x$.
Pour tout $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$: $\quad\mathrm{Arctan}\,\tan x=x\quad$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$: $\quad\tan\mathrm{Arctan}\,x=x$.

---

7 $\mathrm{Arccos}\,\cos\dfrac{29\pi}{6}=\mathrm{Arccos}\,\cos\dfrac{5\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}\quad\dfrac{5\pi}{6}\in[0,\pi]$.
$\mathrm{Arcsin}\,\sin\dfrac{17\pi}{6}=\mathrm{Arcsin}\,\sin\dfrac{5\pi}{6}=\mathrm{Arcsin}\,\sin\left(\pi-\dfrac{5\pi}{6}\right)=\mathrm{Arcsin}\,\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}\quad$ car : $\quad\dfrac{\pi}{6}\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

---

8 L'égalité : $\quad\mathrm{Arcsin}'=-\mathrm{Arccos}'\quad$ sur $]-1,1[$ s'écrit aussi : $\quad\big(\mathrm{Arcsin}+\mathrm{Arccos}\big)'=0\quad$ et montre donc que la fonction $x\longmapsto\mathrm{Arcsin}\,x+\mathrm{Arccos}\,x$ est constante sur $]-1,1[$ — de valeur $\dfrac{\pi}{2}$ après évaluation en 0 par exemple. Par continuité en -1 et 1, on peut même dire que pour tout $x\in[-1,1]$: $\quad\mathrm{Arccos}\,x=\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{Arcsin}\,x.\quad$ Cette relation signifie géométriquement que le graphe de la fonction Arccos est le symétrique du graphe de la fonction Arcsin par rapport à la droite horizontale d'équation $y=\dfrac{\pi}{4}$.



---

9 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\quad e^{i\theta} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \equiv 0\ [2\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$

puis : $\quad e^{i\theta} = i \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \in \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$,

et enfin : $\quad e^{i\theta} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad e^{i\theta} = e^{-\frac{i\pi}{4}} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \in -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}$.

---

10 $\arg(-7) = \pi, \quad \arg(5i) = \dfrac{\pi}{2}, \quad \arg\left(i + \sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ $\quad$ et $\quad \arg\left(\dfrac{i}{1+i}\right) \equiv \arg(i) - \arg(1+i) \equiv \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

---

11 Pour commencer : $\quad \arg(-2-3i) \equiv \pi + \mathrm{Arctan}\, \dfrac{-3}{-2}\ [2\pi] \equiv \pi - \mathrm{Arctan}\, \dfrac{3}{2}\ [2\pi]$.

Ensuite, $-2-3i$ possède un argument θ dans $\left[-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right]$ et : $\quad -\theta \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \subset [0, \pi]$, $\quad$ donc :

$$\cos(-\theta) = \cos\theta = \frac{-2}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}} = -\frac{2}{\sqrt{13}},$$

et enfin : $\quad \arg(-2-3i) \equiv -\mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)\ [2\pi]$.

Pour finir, θ n'appartient pas à $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, mais : $\quad \pi - \theta \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, $\quad$ donc : $\quad -\pi - \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$. $\quad$ Il en découle que : $\sin(-\pi-\theta) = \sin(\pi-\theta) = \sin(\theta) = \dfrac{-3}{\sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}} = -\dfrac{3}{\sqrt{13}}$, $\quad$ puis que : $\quad \theta \equiv \mathrm{Arcsin}\, \dfrac{3}{\sqrt{13}} - \pi \equiv \pi + \mathrm{Arcsin}\, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\ [2\pi]$.

---

12 Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^z = i \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x = 1 \quad \text{et} \quad y \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 0 \quad \text{et} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad z = \frac{i\pi}{2} + 2ik\pi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} e^z = 1 + 2i \quad &\Longleftrightarrow \quad e^z = \sqrt{5}\, e^{i\,\mathrm{Arctan}\, 2} \quad \Longleftrightarrow \quad e^x = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad y \equiv \mathrm{Arctan}\, 2\ [2\pi] \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\ln 5}{2} \quad \text{et} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad y = \mathrm{Arctan}\, 2 + 2k\pi \\ &\Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}, \quad z = \frac{\ln 5}{2} + i\,\mathrm{Arctan}\, 2 + 2ik\pi. \end{aligned}$$

13

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \mathrm{Im}\Big(\big(-\sqrt{3} + 3i\big)(\cos x + i\sin x)\Big) = \mathrm{Im}\Big(2\sqrt{3}\, e^{\frac{2i\pi}{3}}\, e^{ix}\Big) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{Im}\Big(e^{\left(x + \frac{2i\pi}{3}\right)}\Big) = 2\sqrt{3}\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right).$$

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad 3\cos x + 4\sin x = \mathrm{Re}\big((3-4i)(\cos x + i\sin x)\big)$. $\quad$ Il nous faut donc déterminer une forme trigonométrique de $3-4i$. Or : $\quad |3-4i| = 5 \quad$ et $\quad 3 > 0$, $\quad$ donc : $\quad 3 - 4i = 5\, e^{-i\,\mathrm{Arctan}\, \frac{4}{3}}$, $\quad$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$3\cos x + 4\sin x = 5\,\mathrm{Re}\Big(e^{-i\,\mathrm{Arctan}\, \frac{4}{3}}\, e^{ix}\Big) 5\cos\left(x - \mathrm{Arctan}\, \frac{4}{3}\right).$$

---

14 La relation : $\mathrm{j}^3=1$ nous permet de raisonner modulo 3 en exposant : $442 \equiv 1\ [3]$, donc $\mathrm{j}^{442}=\mathrm{j}$, et comme par ailleurs $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0$: $\left(3\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1\right)(\mathrm{j}+2)=3\mathrm{j}^3+7\mathrm{j}^2+3\mathrm{j}+2=3\times 1+7(-1-\mathrm{j})+3\mathrm{j}+2=-2-4\mathrm{j}$.

---

15 Pour tout $z\in\mathbb{C}$: $z^3=8\mathrm{i} \iff z^3=2^3\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} \iff \exists\, k\in [\![0,2]\!],\quad z=2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}+\frac{2\mathrm{i}k\pi}{3}} \iff z\in\left\{2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}},2\,\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}},-2\mathrm{i}\right\}$.

---

16 L'application $z\longmapsto -\mathrm{i}z=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}\,z$ n'est autre que la rotation de centre 0 et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
Pour tout $z\in\mathbb{C}$: $3+2\mathrm{i}z=z \iff z=\dfrac{3}{1-2\mathrm{i}}=\dfrac{3+6\mathrm{i}}{5}$. Comme par ailleurs $2\mathrm{i}=2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$, la fonction $z\longmapsto 3+2\mathrm{i}z$ est la similitude de centre $\dfrac{3+6\mathrm{i}}{5}$, de rapport 2 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

---

17 Le vecteur d'affixe $z-2-3\mathrm{i}$ est « tourné » d'un angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ et devient le vecteur d'affixe $z'-2-3\mathrm{i}$, donc : $z'-2-3\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}(z-2-3\mathrm{i})=-\mathrm{i}(z-2-3\mathrm{i})$. Finalement : $z'=-\mathrm{i}z-1+5\mathrm{i}$.

18

- **Première erreur :** Le calcul proposé est valable pour θ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$ — et non $\mathbb{R}$ — à cause de la fonction tangente.
- **Deuxième erreur :** $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$ AVEC UN « i » AU DÉNOMINATEUR ! La deuxième égalité est donc fausse.
- **Troisième erreur :** $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1}=\dfrac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}+1}{\left|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1\right|^2}$ car : $\overline{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}+1}=\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}+1\neq \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta}-1$. La quatrième égalité est donc fausse.

19

- **Première erreur :** En général : $\mathrm{Re}\left(z^2\right)\neq \mathrm{Re}(z)^2$, donc ici : $\cos^2\dfrac{k\pi}{n}=\left(\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)^2=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)^2\neq \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)$.
- **Deuxième erreur :** Dans le calcul de la somme géométrique à la fin, le premier terme « $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ » a été oublié.
- **Troisième erreur :** Il n'a aucun sens d'écrire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}=\dfrac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi}-1}{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}-1}$. Comment le quotient à droite pourrait-il dépendre de k alors que la somme n'en dépend pas ? La raison géométrique de la somme vaut $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ et non pas $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$.

20

- **Première erreur :** Pour tout $z\in\mathbb{C}$: $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ AVEC UN « i » AU DÉNOMINATEUR ! La première équivalence est donc fausse.
- **Deuxième erreur :** L'équivalence : $\overline{z}^{\,3}=\mathrm{i} \iff \overline{z}=-\mathrm{i}$ est fausse car z est COMPLEXE. Il faut ici faire appel à notre cours sur les racines $n^{\text{èmes}}$. En l'occurrence :
$$\overline{z}^{\,3}=\mathrm{i} \iff z^3=-\mathrm{i}=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} \iff \exists\, k\in[\![0,2]\!],\quad z=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}+\frac{2\mathrm{i}k\pi}{3}} \iff z\in\left\{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}},\mathrm{i},\mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{6}}\right\}.$$
