Nombres complexes (je sais faire)

1 L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1 Exprimer pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(iz)$, $\mathrm{Im}(iz)$ et $\mathrm{Re}(z^2)$ en fonction de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$.

✎ Je sais exprimer $\mathrm{Re}(zz')$ et $\mathrm{Im}(zz')$ en fonction des parties réelle et imaginaire de z et z'.

2 Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\dfrac{2-i}{3-7i}$.

✎ Je sais énoncer les propriétés usuelles du module, dont l'inégalité triangulaire généralisée. Je sais qu'un module au carré est souvent plus intéressant qu'un module en vertu de la relation de factorisation : $|z|^2 = z\overline{z}$.

3 Exprimer $|z+1|^2$ en fonction de $|z|$ et $\mathrm{Re}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

✎ Je sais calculer sous forme algébrique les racines carrées d'un nombre complexe et résoudre les équations du second degré à coefficients complexes. Je sais que la notation $\sqrt{z}$ n'a de sens que si z est un réel positif.

4 Résoudre l'équation : $z^2 - z = i - 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

2 Autour de l'exponentielle complexe

✎ Je sais placer sur le cercle trigonométrique les nombres classiques du genre : $e^{\frac{i\pi}{2}}$, $e^{\frac{2i\pi}{3}}\ldots$

5 Donner de tête les solutions des équations : $e^{i\theta} = 1$, $e^{i\theta} = i$ et $e^{i\theta} = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ d'inconnue $\theta \in \mathbb{R}$.

✎ Je sais énoncer les formules d'Euler et Moivre. Je sais linéariser et dé-linéariser les expressions trigonométriques.

6 Donner un argument des nombres complexes : -7, $5i$, $i+\sqrt{3}$ et $\dfrac{i}{1+i}$.

✎ Je sais exprimer x et y en fonction de r et θ dans le cas où : $x + iy = re^{i\theta}$, ainsi que r et θ en fonction de x et y.

7 Donner un argument de $-1+2i$ sous la forme d'une arctangente, puis d'un arccosinus, puis d'un arcsinus.

8 Proposer des valeurs de c et φ pour lesquelles pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $3\cos\theta + 4\sin\theta = c\cos(\theta+\varphi)$. On proposera φ sous la forme d'une arctangente.

✎ Je sais mettre en œuvre la technique de l'angle moitié et je sais l'utiliser pour factoriser les expressions : $\cos x + \cos y$, $\sin x - \sin y$...

✎ Je sais factoriser les sommes du genre : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(kx+y)$.

✎ Je sais définir e^z pour tout $z \in \mathbb{C}$ et je sais calculer le module et un argument d'une telle exponentielle.

9 Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $e^z = i$ et $e^z = 1+2i$.

✎ Je sais définir l'ensemble $\mathbb{U}_n$ et décrire ses éléments. Je sais calculer les racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe donné sous forme trigonométrique. Je sais que la notation $\sqrt[n]{z}$ n'a de sens que si z est un réel positif.

✎ Je sais définir le nombre complexe j et énoncer ses propriétés usuelles.

10 Déterminer les racines cubiques de $8i$.

11 Exprimer en fonction de j les nombres : j^{32} et $(3j^2+j+1)(j+2)$.

3 Interprétation géométrique des nombres complexes

✎ Je sais décrire géométriquement le passage d'un nombre complexe z aux nombres complexes $z+u$, λz avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $e^{i\theta}z$, et plus généralement $az+b$.

12 Décrire géométriquement les transformations : $z \longmapsto iz$ et $z \longmapsto 3-2iz$.

13 Déterminer pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'image z' de z par la rotation de centre $2+3i$ et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

4 Je sais repérer et corriger une erreur

Corriger, partout où c'est nécessaire, le calcul ou raisonnement suivant.

14

On cherche à résoudre l'équation : $\mathrm{Re}\left(z^3\right) = 1 + \mathrm{Im}\left(z^3\right)$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}\left(z^3\right) = 1 + \mathrm{Im}\left(z^3\right) \iff \frac{z^3 + \overline{z}^3}{2} = 1 + \frac{z^3 - \overline{z}^3}{2} \iff \overline{z}^3 = 1$$
$$\iff \overline{z} = 1 \iff z = 1.$$

15

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = \frac{\left(e^{2i\theta} - 1\right)\left(e^{-2i\theta} - 1\right)}{\left|e^{2i\theta} + 1\right|^2} = \frac{2 - e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}}{\left|e^{i\theta}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right|^2}$$
$$= \frac{\left(1 - \cos(2\theta)\right)}{2\cos^2\theta}.$$

16

Pour tous $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2\frac{k\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$.

Or : $\dfrac{2\pi}{n} \in \left]0, \pi\right[$, donc : $e^{\frac{2i\pi}{n}} \neq 1$, donc : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos^2\frac{k\pi}{n} = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2ik\pi} - 1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1}\right) \overset{e^{2i\pi}=1}{=} \mathrm{Re}(0) = 0.$

17

On cherche l'ensemble des $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ pour lesquels : $\dfrac{z^2}{z - i} \in \mathbb{R}$. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$:

$$\frac{z^2}{z - i} \in \mathbb{R} \iff \frac{\mathrm{Im}\left(z^2\right)}{\mathrm{Im}(z) - 1} = 0 \iff \frac{2\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Im}(z) - 1} = 0$$
$$\iff \mathrm{Re}(z) = 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{Im}(z) = 0.$$

L'ensemble cherché est ainsi la réunion des droites d'équation : $x = 0$ et $y = 0$.

18

On cherche les racines carrées de $3 - 4i$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(a + ib)^2 = 3 - 4i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases} \iff a^2 = 14, \quad b^2 = 11 \quad \text{et} \quad ab = -2$$
$$\iff a = \pm\sqrt{14}, \quad b = \pm\sqrt{11} \quad \text{et} \quad ab = -2$$
$$\iff (a, b) = \left(\sqrt{14}, -\sqrt{11}\right) \quad \text{ou} \quad (a, b) = \left(-\sqrt{14}, \sqrt{11}\right).$$

Les racines carrées de $3 - 4i$ sont donc : $\sqrt{14} - i\sqrt{11}$ et son conjugué.

5 Correction des exercices

1 Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $\mathrm{Re}(\mathrm{i}z) = -\mathrm{Im}(z)$, $\mathrm{Im}(\mathrm{i}z) = \mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Re}\left(z^2\right) = \mathrm{Re}(z)^2 - \mathrm{Im}(z)^2$.

---

2 $\dfrac{2-\mathrm{i}}{3+7\mathrm{i}} = \dfrac{13}{58} + \dfrac{11}{58}\,\mathrm{i}$.

---

3 Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $|z+1|^2 = (z+1)\left(\overline{z}+1\right) = z\overline{z} + z + \overline{z} + 1 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z) + 1$.

---

4 Discriminant : $-3+4\mathrm{i}$. Racines carrées du discriminant : $\pm(1+2\mathrm{i})$. Solutions de l'équation : $-\mathrm{i}$ et $1+\mathrm{i}$.

---

5 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0\ [2\pi] \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$

puis : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{i} \iff \theta \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \iff \theta \in \dfrac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$,

et enfin : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \iff \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} \iff \theta \equiv -\dfrac{\pi}{4}\ [2\pi] \iff \theta \in -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z}$.

---

6 $\arg(-7) = \pi$, $\arg(5\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{2}$, $\arg\left(\mathrm{i}+\sqrt{3}\right) = \dfrac{\pi}{6}$ et $\arg\left(\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right) \equiv \arg(\mathrm{i}) - \arg(1+\mathrm{i}) \equiv \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} \equiv \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

---

7 $\arg(-1+2\mathrm{i}) \equiv \pi + \mathrm{Arctan}\,\dfrac{2}{-1}\ [2\pi] \equiv \pi - \mathrm{Arctan}\,2\ [2\pi]$.

Le nombre $-1+2\mathrm{i}$ possède un argument θ dans $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \subset [0,\pi]$, pour lequel : $\cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. A fortiori : $\arg(-1+2\mathrm{i}) \equiv \mathrm{Arccos}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\ [2\pi]$.

Le nombre $-1+2\mathrm{i}$ ne possède en revanche pas d'argument dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, mais par contre : $\pi - \theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. L'égalité : $\sin(\pi-\theta) = \sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ montre alors que : $\arg(-1+2\mathrm{i}) \equiv \pi - \mathrm{Arcsin}\,\dfrac{2}{\sqrt{5}}\ [2\pi]$.

---

8 Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$: $3\cos\theta + 4\sin\theta = \sqrt{3^2+4^2}\left(\dfrac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos\theta + \dfrac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin\theta\right) = 5\left(\dfrac{3}{5}\cos\theta + \dfrac{4}{5}\sin\theta\right)$. Nous cherchons donc un réel φ pour lequel : $\cos\varphi = \dfrac{3}{5}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{4}{5}$, i.e. : $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \dfrac{3-4\mathrm{i}}{5}$. Comme : $\dfrac{3}{5} > 0$, on peut choisir : $\varphi = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{-4}{3} = -\mathrm{Arctan}\dfrac{4}{3}$. Enfin, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$3\cos\theta + 4\sin\theta = 5\left(\cos\left(\mathrm{Arctan}\,\frac{4}{3}\right)\cos\theta + \sin\left(\mathrm{Arctan}\,\frac{4}{3}\right)\sin\theta\right) = 5\,\cos\left(\theta - \mathrm{Arctan}\,\frac{4}{3}\right).$$

---

9 Pour tout $z = x+\mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $x,y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z = \mathrm{i} &\iff \mathrm{e}^x = 1 \quad \text{et} \quad y \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \\ &\iff x = 0 \quad \text{et} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}/ \quad y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\iff \exists\, k \in \mathbb{Z}/ \quad z = \frac{\mathrm{i}\pi}{2} + 2\mathrm{i}k\pi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^z = 1+2\mathrm{i} &\iff \mathrm{e}^z = \sqrt{5}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,2} \iff \mathrm{e}^x = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad y \equiv \mathrm{Arctan}\,2\ [2\pi] \\ &\iff x = \frac{\ln 5}{2} \quad \text{et} \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}/ \quad y = \mathrm{Arctan}\,2 + 2k\pi \\ &\iff \exists\, k \in \mathbb{Z}/ \quad z = \frac{\ln 5}{2} + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,2 + 2\mathrm{i}k\pi. \end{aligned}$$

---

10 Pour tout $z \in \mathbb{C}$: $z^3 = 8\mathrm{i} \iff z^3 = 2^3\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}} \iff \exists\, k \in [\![0,2]\!]/ \quad z = 2\,\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}+\frac{2\mathrm{i}k\pi}{3}} \iff z \in \left\{2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}, 2\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}, -2\mathrm{i}\right\}$.

---

11 Comme $\mathrm{j}^3=1$: $\mathrm{j}^{32}=\mathrm{j}^{3\times 10+2}=\mathrm{j}^2$, et comme par ailleurs : $\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1=0$, alors :

$$\left(3\mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1\right)(\mathrm{j}+2)=3\mathrm{j}^3+7\mathrm{j}^2+3\mathrm{j}+2=3\times 1+7(-1-\mathrm{j})+3\mathrm{j}+2=-2-4\mathrm{j}.$$

---

12 L'application $z\longmapsto \mathrm{i}z=e^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}z$ n'est autre que la rotation de centre 0 et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout $z\in\mathbb{C}$: $3-2\mathrm{i}z=z \iff z=\dfrac{3}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{6-3\mathrm{i}}{5}$. Comme par ailleur : $-2\mathrm{i}=2e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$, l'application $z\longmapsto 3-2\mathrm{i}z$ est la similitude de centre $\dfrac{6-3\mathrm{i}}{5}$, de rapport 2 et d'angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.

---

13 Le vecteur d'affixe $z-2-3\mathrm{i}$ est « tourné » d'un angle de mesure $-\dfrac{\pi}{2}$ et devient le vecteur d'affixe $z'-2-3\mathrm{i}$, donc : $z'-2-3\mathrm{i}=e^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}(z-2-3\mathrm{i})=-\mathrm{i}(z-2-3\mathrm{i})$. Finalement : $z'=-\mathrm{i}z-1+5\mathrm{i}$.

14

- **Première erreur :** Pour tout $z\in\mathbb{C}$: $\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$ AVEC UN « i » AU DÉNOMINATEUR ! La première équivalence est donc fausse.
- **Deuxième erreur :** L'équivalence : $\overline{z}^3=1 \iff \overline{z}=1$ est fausse car z est COMPLEXE. Il faut ici faire appel aux racines $n^{\text{èmes}}$. En l'occurrence :

$$\overline{z}^3=1 \iff z^3=1 \iff z\in\mathbb{U}_3 \iff z\in\left\{1,\mathrm{j},\overline{\mathrm{j}}\right\}.$$

15

- **Première erreur :** Le calcul proposé est valable pour θ dans $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[+\pi\mathbb{Z}$ — et non $\mathbb{R}$ — à cause de la fonction tangente.
- **Deuxième erreur :** $\sin\theta=\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}-e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}$ AVEC UN « i » AU DÉNOMINATEUR ! La deuxième égalité est donc fausse.
- **Troisième erreur :** $\dfrac{1}{e^{2\mathrm{i}\theta}+1}=\dfrac{e^{-2\mathrm{i}\theta}+1}{\left|e^{2\mathrm{i}\theta}+1\right|^2}$ car : $\overline{e^{2\mathrm{i}\theta}+1}=e^{-2\mathrm{i}\theta}+1\neq e^{-2\mathrm{i}\theta}-1$. La quatrième égalité est donc fausse.

16

- **Première erreur :** En général : $\mathrm{Re}\left(z^2\right)\neq \mathrm{Re}(z)^2$, donc ici : $\cos^2\dfrac{k\pi}{n}=\left(\cos\dfrac{k\pi}{n}\right)^2=\mathrm{Re}\left(e^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)^2\neq \mathrm{Re}\left(e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\right)$.
- **Deuxième erreur :** Dans le calcul de la somme géométrique à la fin, le premier terme « $e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ » a été oublié.
- **Troisième erreur :** Il n'a aucun sens d'écrire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}=\dfrac{e^{2\mathrm{i}k\pi}-1}{e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}-1}$. Comment le quotient à droite pourrait-il dépendre de k alors que la somme n'en dépend pas ? La raison géométrique de la somme étudiée est : $e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ et non pas : $e^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$.

---

17 Une seule erreur, mais de taille ! En général : $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z'}{z}\right)\neq\dfrac{\mathrm{Im}(z')}{\mathrm{Im}(z)}$. La première équivalence est donc fausse. Pour calculer la partie imaginaire de $\dfrac{z^2}{z-\mathrm{i}}$, on peut procéder de la manière suivante :

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z^2}{z-\mathrm{i}}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{z^2\left(\overline{z}+\mathrm{i}\right)}{|z-\mathrm{i}|^2}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{z|z|^2+\mathrm{i}z^2}{\mathrm{Re}(z)^2+\left(\mathrm{Im}(z)-1\right)^2}\right)=\frac{\mathrm{Im}(z)\,|z|^2+\mathrm{Im}\left(\mathrm{i}z^2\right)}{\mathrm{Re}(z)^2+\left(\mathrm{Im}(z)-1\right)^2}=\frac{\mathrm{Im}(z)\,|z|^2+\mathrm{Re}\left(z^2\right)}{|z|^2-2\,\mathrm{Im}(z)+1}$$
$$=\frac{\mathrm{Im}(z)\,|z|^2+\left(\mathrm{Re}(z)^2-\mathrm{Im}(z)^2\right)}{|z|^2-2\,\mathrm{Im}(z)+1}.$$

Bref, c'est plutôt affreux et il n'est pas si facile de décrire l'ensemble des nombres $z\in\mathbb{C}\setminus\left\{\mathrm{i}\right\}$ pour lesquels : $\dfrac{z^2}{z-\mathrm{i}}\in\mathbb{R}$!

18

- **Première erreur :** L'équation des modules s'écrit ici : $a^2+b^2=|a+\mathrm{i}b|^2=|3-4\mathrm{i}|=\sqrt{25}=5\neq 25$.
- **Deuxième erreur :** Malencontreuse erreur dans la conclusion ! Les racines carrées de $3-4\mathrm{i}$ sont : $\sqrt{14}-\mathrm{i}\sqrt{11}$ et son **OPPOSÉ** : $-\sqrt{14}+\mathrm{i}\sqrt{11}$ — et non pas son **CONJUGUÉ**.
