Rappels et compléments calculatoires (je sais faire)

1 Forme irréductible d'un rationnel

✎ Je sais écrire un rationnel sous forme irréductible et mettre au même dénominateur une somme ou un produit de rationnels. Par ailleurs, je sais qu'il ne faut jamais donner un résultat sous forme non irréductible — par exemple $\frac{4}{6}$ à la place de $\frac{2}{3}$.

1 Simplifier : $\frac{1}{5}+\frac{13}{30}-\frac{7}{6}+\frac{2}{3}$ et $\frac{7}{20}+\frac{11}{10}-\frac{23}{30}-\frac{4}{15}$.

2 Inégalités

✎ Je sais que les symboles « $\leqslant$ » et « $<$ » ne signifient pas la même chose et je ne les utilise jamais sans me demander lequel des deux je veux vraiment.

✎ Je sais qu'en multipliant une inégalité par un réel positif, je conserve son sens, et qu'en la multipliant par un réel négatif, je le renverse.

2 Est-il vrai que pour tout $x \geqslant 0$: $x^2 \geqslant x$?

3 On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $e^x \leqslant 1+x$. Comparer : $(x-1)\,e^x$ et x^2-1 pour tout $x \in \mathbb{R}$.

✎ Je sais que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$: $0 < a \leqslant b \implies \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$.

4 Que devient l'inégalité : $-5 \leqslant -3$ quand on la passe à l'inverse ? Et l'inégalité : $-2 < 7$?

✎ Je sais que pour majorer une fraction de réels positifs, il convient de majorer son numérateur et de minorer son dénominateur.

5 Proposer un encadrement de : $\frac{2x-1}{x^2+x+3}$ pour tout $x \in [1,3]$.

3 VALEURS ABSOLUES, PUISSANCES ET RACINES CARRÉES

✎ Je sais enlever les valeurs absolues d'une expression donnée en distinguant des cas.

6 Trouver pour tout $x \in \mathbb{R}$, en distinguant des cas, une expression de : $|x+2| + \left|x^2 - 3x + 2\right|$ qui ne fasse apparaître aucune valeur absolue.

7 Est-il vrai que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|x| \leqslant |x+1|$?

✎ Je sais interpréter la valeur absolue comme une distance. Je sais écrire une inégalité : $|x-a| \leqslant \varepsilon$ sous la forme : $x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et je sais aussi faire l'inverse.

8 Traduire pour tout $x \in \mathbb{R}$ les propositions : $|2x-1| \leqslant 1$, puis : $|x-2| > 3$ et : $x \in [-1, 3]$.

✎ Je sais que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\sqrt{x^2} = |x|$, et non pas : $\sqrt{x^2} \cancel{=} x$ en général.

✎ Je sais que les équivalences suivantes sont fausses en général :

$$ax = ay \quad \cancel{\Longleftrightarrow} \quad x = y, \qquad a^2 = b^2 \quad \cancel{\Longleftrightarrow} \quad a = b \qquad \text{et} \qquad x = \sqrt{a} \quad \cancel{\Longleftrightarrow} \quad x^2 = a$$

et je sais les corriger pour les rendre correctes.

9 Résoudre l'équation : $x\sqrt{x+1} = x^2$ d'inconnue $x \in [-1, +\infty[$.

4 JE SAIS REPÉRER ET CORRIGER UNE ERREUR

Corriger, partout où c'est nécessaire, le calcul ou raisonnement suivant.

10 Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{3^{n^2}-1}{\left(3^n+1\right)^2 - 6^n - 2} = \dfrac{3^{n^2}-1}{\left(9^{n^2} + 2 \times 3^n + 1\right) - 6^n - 2} = \dfrac{3^{n^2}-1}{9^{n^2}-1} = \dfrac{1}{3^{n^2}+1}$.

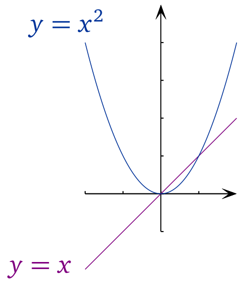
11 Soit $x \in [-2, 4[$ fixé. Clairement : $|x| \in [0, 4[$ donc : $|x| + 3 \in [0, 7[$.
En outre, toujours parce que $x \in [-2, 4[$: $x^2 \in [4, 16[$ donc : $x^2 + 4 \in [8, 20[$.
Conclusion : $\dfrac{|x|+3}{x^2+4} \in \left[0, \dfrac{7}{20}\right[$.

12 Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\dfrac{\big||x-1|-1\big|}{|x+2|+1} \leqslant \dfrac{\big|\left(|x|+1\right)-1\big|}{\left(|x|+2\right)+1} \leqslant \dfrac{|x|}{|x|+3} \leqslant 1$.

13 Pour tout $x \in [-8, +\infty[$:
$$\begin{aligned} \sqrt{x+8} = x+2 \quad &\Longleftrightarrow \quad x+8 = (x+2)^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 + 3x - 4 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{ou} \quad x = 4. \end{aligned}$$

5 Correction des exercices

1 $\dfrac{1}{5}+\dfrac{13}{30}-\dfrac{7}{6}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{15}$ et $\dfrac{7}{20}+\dfrac{11}{10}-\dfrac{23}{30}-\dfrac{4}{15}=\dfrac{5}{12}$.



---

2 C'est faux ! Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $x^2\geqslant x \iff x(x-1)\geqslant 0 \iff x\in\,]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$.

L'inégalité proposée est donc fausse si $x\in\,]0,1[$, ce que la figure ci-contre illustre bien.

---

3 Pour tout $x\geqslant 1$: $x-1\geqslant 0$ donc : $(x-1)\,e^x\geqslant(x-1)(x+1)=x^2-1$, et pour tout $x<1$: $x-1<0$ donc : $(x-1)\,e^x\leqslant(x-1)(x+1)=x^2-1$.

---

4 $-\dfrac{1}{3}\leqslant-\dfrac{1}{5}$ et $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{7}$.

---

5 Pour tout $x\in[1,3]$: $\dfrac{1}{15}\leqslant\dfrac{2x-1}{x^2+x+3}\leqslant\dfrac{5}{5}=1$.

---

6 Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|x+2|+\left|x^2-3x+2\right|=|x+2|+\left|(x-1)(x-2)\right|=\begin{cases}(-x-2)+\left(x^2-3x+2\right)=x^2-4x & \text{si } x\leqslant-2\\ (x+2)+\left(x^2-3x+2\right)=x^2-2x+4 & \text{si } -2<x\leqslant 1\\ (x+2)+\left(-x^2+3x-2\right)=-x^2+4x & \text{si } 1<x\leqslant 2\\ (x+2)+\left(x^2-3x+2\right)=x^2-2x+4 & \text{si } x>2.\end{cases}$

---

7 C'est faux ! Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|x|\leqslant|x+1| \iff x^2\leqslant(x+1)^2 \iff 2x+1\geqslant 0 \iff x\geqslant-\dfrac{1}{2}$.

---

8 Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $|2x-1|<1 \iff x\in[0,1]$, puis :

$|x-2|>3 \iff x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]5,+\infty[$ et : $x\in[-1,3] \iff |x-2|\leqslant 2$.

---

9 Pour tout $x\in[-1,+\infty[$: $x\sqrt{x+1}=x^2 \iff x=0$ ou $\sqrt{x+1}=x$

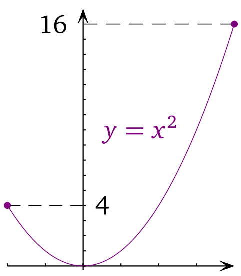
$\iff x=0$ ou $\left(x^2=x+1 \text{ et } x\geqslant 0\right) \iff x\in\left\{0,\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$.

10

- **Première erreur :** $\left(3^n\right)^2=3^{2n}=9^n\neq 3^{n^2}$.
- **Deuxième erreur :** Pour $n\neq 1$: $6^n=(2\times 3)^n=2^n\times 3^n\neq 2\times 3^n$.

11

- **Fausse erreur :** Le passage de : $|x|\in[0,4[$ à : $|x|+3\in[0,7[$ n'est pas incorrect car : $[3,7[\,\subset[0,7[$, mais on aurait aussi pu proposer mieux : $|x|+3\in[3,7[$.
- **Première erreur :** Le passage de : $x\in[-2,4[$ à : $x^2\in[4,16[$ est incorrect, la deuxième proposition devrait être : $x^2\in[0,16[$ comme le justifie clairement la figure ci-dessous — attention, l'unité des abscisses n'est pas la même que celle des ordonnées.



- **Deuxième erreur :** Le passage de : $|x|+3 \in [0,7[$ et : $x^2+4 \in [8,20[$ à : $\dfrac{|x|+3}{x^2+4} \in \left[0, \dfrac{7}{20}\right[$ est incorrect car le passage à l'inverse renverse les inégalités positives, la conclusion devrait donc plutôt être : $\dfrac{|x|+3}{x^2+4} \in \left[0, \dfrac{7}{8}\right[$. On pourrait même conclure par : $\dfrac{|x|+3}{x^2+4} \in \left[\dfrac{3}{20}, \dfrac{7}{8}\right[$ en corrigeant la fausse erreur décrite ci-dessus.

12

- **Première erreur :** Il est vrai, d'après l'inégalité triangulaire, que : $|x-1| \leqslant |x|+1$, mais faux a priori que : $\Big||x-1|-1\Big| \leqslant \Big|\big(|x|+1\big)-1\Big|$. Pourquoi ? Le raisonnement sous-jacent, c'est que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad |a| \leqslant |b|, \qquad \textbf{CE QUI EST FAUX !}$$

  Cela revient à affirmer que la fonction valeur absolue est croissante sur $\mathbb{R}$.

- **Deuxième erreur :** Il est vrai, d'après l'inégalité triangulaire, que : $|x+2| \leqslant |x|+2$, mais le passage à l'inverse renverse les inégalités positives, donc : $\dfrac{1}{\big(|x|+2\big)+1} \leqslant \dfrac{1}{|x+2|+1}$ et non le contraire comme le suggère le calcul proposé.

13

- **Première erreur :** Autant il est vrai que : $\sqrt{x+8} = x+2 \quad \Longrightarrow \quad x+8 = (x+2)^2$, autant il est faux que : $x+8=(x+2)^2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x+8} = x+2$, car n'oublions pas que pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\sqrt{a^2} = |a|$. Ce qui est vrai, si l'on veut, c'est ceci : $x+8=(x+2)^2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x+8} = |x+2|$.

  Il est bien sûr possible de corriger l'équivalence proposée :

$$\sqrt{x+8} = x+2 \quad \Longleftrightarrow \quad x+8=(x+2)^2 \quad \boxed{\text{et} \quad x+2 \geqslant 0.}$$

- **Deuxième erreur :** Les solutions de l'équation : $x^2+3x-4=0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ sont 1 et -4, et non pas 1 et 4.
