Rappels et compléments sur les fonctions (je sais faire)

1 Vocabulaire usuel sur les fonctions

✎ Je sais écrire la définition de l'image $f(A')$ d'une partie A' de A par une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$.

1 Déterminer de tête l'image par la fonction $x \longmapsto x^2$ de l'intervalle $[-3, 2]$, puis l'image par la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ de l'ensemble $]-2, 4] \setminus \{0\}$.

✎ Je sais déterminer l'ensemble de définition d'une fonction composée.

2 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions : $x \longmapsto \sqrt{\ln\left(2-\sqrt{x}\right)}$ et $x \longmapsto \dfrac{\ln|x|}{\sqrt{3-e^x}}$.

✎ Je sais écrire avec des quantificateurs la définition de la monotonie ou de la monotonie stricte d'une fonction, ainsi que de son caractère majoré, minoré ou borné.

3 La somme et le produit de deux fonctions croissantes sont-ils des fonctions croissantes ? Que peut-on dire de la somme et de la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante ?

✎ Je sais tracer, à partir du graphe d'une fonction f, l'allure du graphe des fonctions $x \longmapsto -f(x)$, $x \longmapsto f(-x)$, $x \longmapsto f(x) + y_0$, $x \longmapsto f(x + x_0)$, $x \longmapsto \lambda f(x)$ et $x \longmapsto f(\lambda x)$.

4 Tracer l'allure du graphe des fonctions : $x \longmapsto -\dfrac{1}{2x+4}$ et $x \longmapsto \sqrt{3-x} + 2$.

5 Déterminer une période des fonctions : $x \longmapsto \sin\dfrac{x}{5}$ et $x \longmapsto \sin\dfrac{2x}{3} + \sin(6x)$.

2 Rappels sur la dérivation

✎ Je sais expliquer intuitivement l'équation de la tangente en un point d'une fonction dérivable.

6 Déterminer une équation de la tangente en 1 de la fonction $x \longmapsto e^{4x}$.

✎ Je sais expliquer intuitivement l'équation de la tangente en un point d'une fonction dérivable.

✎ Je sais déterminer l'ensemble de dérivabilité d'une fonction.

7 Déterminer l'ensemble de dérivabilité des fonctions : $x \longmapsto \sqrt{6-x} \times \ln \ln x$ et $x \longmapsto \ln\left(4-\sqrt{1-x}\right)$.

✎ Je sais dériver directement sans calculs intermédiaires toute fonction définie par un emboîtement d'additions, produits, quotients et compositions. Je sais qu'une dérivée gagne à être factorisée quand on s'intéresse à son signe.

8 Dériver les fonctions : $x \longmapsto \sqrt{\ln x}$ et $x \longmapsto \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x+1}$ après avoir précisé leurs ensembles de dérivabilité respectifs.

✎ Je sais étudier les variations d'une fonction en étudiant le signe de sa dérivée.

✎ Je sais que pour montrer une inégalité, il est souvent conseillé d'étudier les variations d'une fonction. Je sais le faire aussi quand l'inégalité contient deux variables en gelant l'une d'elles. Je sais enfin que j'ai intérêt à choisir des fonctions « simples » avec le moins de quotients et compositions possible.

✎ Je sais rédiger correctement mes définitions de fonctions, leur dérivabilité, leur monotonie, etc. Je sais qu'une écriture du type « $\left(e^{\sqrt{\ln x}}\right)'$ » est rigoureusement interdite.

9 Corriger la phrase : « La fonction $\sin\left(x^3\right)$ est dérivable pour tout $x \in \mathbb{R}$. »

3 Fonctions usuelles

✎ Je sais déterminer l'équation d'une droite à partir de deux de ses points ou à partir d'un de ses points et de son coefficient directeur.

10 Déterminer une équation de la droite passant par les points de coordonnées $(1,-1)$ et $(2,3)$, puis une équation de la droite de coefficient directeur 2 passant par le point de coordonnée $(2,1)$.

✎ Je sais calculer de tête la limite en $\pm\infty$ d'un polynôme ou d'une fraction rationnelle.

11 Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1+x^2-2x^3\right)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+2}{5x^2+x-7}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3+4x^2-5}{x^2+3}$.

✎ Je sais tracer l'allure du graphe des fonctions exponentielle et logarithme.

12 Résoudre l'équation : $\ln\left(x^2\right) = \dfrac{\ln x}{2} + 3$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

13 Calculer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+x\ln x}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+x\ln x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}}$.

> Je sais pour quelles valeurs de x et y la puissance x^y est définie et je sais l'écrire sous forme exponentielle.

> Je sais tracer sur un même dessin l'allure des graphes des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$ en faisant certaines distinctions sur α.

> Je sais définir les fonctions sinus, cosinus et tangente hyperboliques, les dériver et tracer l'allure de leurs graphes.

14 Rappeler quelle relation lie sh x et ch x pour tout $x \in \mathbb{R}$. Quel moyen mnémotechnique ?

4 Introduction aux bijections et aux réciproques

> Je sais écrire avec des quantificateurs la définition d'une bijection.

> Je sais expliquer la différence entre les expressions « à valeurs dans » et « sur ».

> Je sais énoncer le théorème des valeurs intermédiaires ainsi que sa version strictement monotone.

> Je sais expliquer pourquoi en général : $f\big([a,b]\big) \cancel{=} \big[f(a), f(b)\big]$, $f\big(]a,b[\big) \cancel{=} \big]f(a), f(b)\big[$, etc.

> Je sais dériver une réciproque et je sais à quelle condition j'ai le droit de le faire.

5 Vrai ou faux ?

15 Vrai ou faux ? Justifier.

1) La dérivée seconde de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est $x \longmapsto -\dfrac{2}{x^3}$.
2) La fonction $x \longmapsto \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sin(3x)$ est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.
3) La dérivée $13^{\text{ème}}$ de la fonction $x \longmapsto \operatorname{sh} x$ est la fonction $x \longmapsto \operatorname{ch} x$.
4) La somme de deux fonctions paires est une fonction paire et la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.
5) L'inverse d'une fonction bornée est une fonction bornée.

6) Le produit de deux fonctions bornées est une fonction bornée.

7) Pour toute fonction monotone $f : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(1-x)$ est définie et monotone sur $[0,2]$.

8) Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(x)^2$ est paire.

9) Pour tout intervalle I et pour toute fonction $f \in \mathscr{D}(I,\mathbb{R})$: $\quad \left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f^{-1} \circ f'}$.

10) La réciproque d'une fonction 2π-périodique est 2π-périodique.

6 Je sais repérer et corriger une erreur

Corriger, partout où c'est nécessaire, le calcul ou raisonnement suivant.

16

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (x+1)\sqrt{x+1} + \sqrt{x} \times \dfrac{3}{2}\sqrt{x+1}}{(x+1)^3} = \frac{(4x+1)\sqrt{x+1}}{2(x+1)^3\sqrt{x}} = \frac{4x+1}{2(x+1)^2\sqrt{x+1}\sqrt{x}}.$$

17

On note f la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1,+\infty[$.

La fonction $x \longmapsto x^2-1$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ aussi, donc c'est également le cas de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$. En outre, la fonction $x \longmapsto x^{\frac{1}{3}}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$, donc comme quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \times \sqrt{x^2-1} - x^{\frac{1}{3}} \times \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2-1} - \dfrac{6x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{3x^{\frac{2}{3}}\left(x^2-1\right)} = -\frac{5x^2+1}{3x^{\frac{2}{3}}\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

18

On note f la fonction $x \longmapsto \left(\ln\left(e^x-2\right)\right)^{\pi}$. La quantité $f(x)$ est définie si et seulement si : $\quad e^x - 2 > 0$, donc f est définie sur $\left]\ln 2,+\infty\right[$.

Ensuite, $x \longmapsto e^x-2$ est dérivable sur $\left]\ln 2,+\infty\right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $x \longmapsto \ln\left(e^x-2\right)$ est dérivable sur $\left]\ln 2,+\infty\right[$ par composition. Finalement, f elle-même est dérivable sur $\left]\ln 2,+\infty\right[$ et pour tout $x \in \left]\ln 2,+\infty\right[$:

$$f'(x) = \pi \times \frac{1}{e^x-2} \times \left(\ln\left(e^x-2\right)\right)^{\pi-1}.$$

7 Correction des exercices

1 L'image par la fonction $x \longmapsto x^2$ de l'intervalle $[-3,2]$ est : $[0,9]$, et l'image par la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ de l'ensemble $]-2,4] \setminus \{0\}$ est : $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{4},+\infty\right[$.

---

2 La fonction $x \longmapsto \sqrt{\ln\left(2-\sqrt{x}\right)}$ est définie sur $[0,1]$ et la fonction $x \longmapsto \frac{\ln|x|}{\sqrt{3-\mathrm{e}^x}}$ sur $\left]-\infty,\ln 3\right[\setminus \{0\}$.

---

3 La somme de deux fonctions croissantes est croissante, mais pas forcément leur produit — pensez au produit de la fonction $x \longmapsto -\frac{1}{x}$ par elle-même. La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante, mais pas forcément leur somme — pensez à la fonction $x \longmapsto \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

---

4 À partir de $x \longmapsto \frac{1}{x}$, translation de vecteur $-2\overrightarrow{\imath}$ pour atteindre $x \longmapsto \frac{1}{x+2}$, puis contraction verticale de facteur pour atteindre $x \longmapsto \frac{1}{2x+4}$, et enfin symétrie par rapport à (Ox) pour atteindre $x \longmapsto -\frac{1}{2x+4}$.

À partir de $x \longmapsto \sqrt{x}$, translation de vecteur $-3\overrightarrow{\imath}$ pour atteindre $x \longmapsto \sqrt{x+3}$, puis symétrie par rapport à (Oy) pour atteindre $x \longmapsto \sqrt{3-x}$, puis translation de vecteur $2\overrightarrow{\jmath}$ pour atteindre $x \longmapsto \sqrt{3-x}+2$.

---

5 La fonction $x \longmapsto \sin\frac{x}{5}$ est 10π-périodique. La fonction $x \longmapsto \sin\frac{2x}{3}$ est 3π-périodique et la fonction $x \longmapsto \sin(6x)$ est $\frac{\pi}{3}$-périodique, donc — période commune — la fonction $x \longmapsto \sin(2x)+\sin(3x)$ est 3π-périodique.

---

6 La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{4x}$ a pour tangente en 1 la droite d'équation : $y = 4\mathrm{e}^4(x-1)+\mathrm{e}^4 = \mathrm{e}^4(4x-3)$.

---

7 La fonction $x \longmapsto \sqrt{6-x} \times \ln\ln x$ est dérivable sur $]1,6[$ et la fonction $x \longmapsto \ln\left(4-\sqrt{1-x}\right)$ sur $]-15,1[$.

---

8 La fonction $x \longmapsto \sqrt{\ln x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \longmapsto \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$. La fonction $x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{x+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $x \longmapsto \frac{x-2\sqrt{x}+1}{2(x+1)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}} = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2(x+1)^2\sqrt{x}}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

---

9 Deux erreurs de rédaction : « La fonction $\boxed{x \longmapsto}$ $\sin\left(x^3\right)$ est dérivable $\boxed{\text{sur}}$ $\mathbb{R}$. »

---

10 La droite passant par les points de coordonnées $(1,-1)$ et $(2,3)$ a pour équation : $y = \frac{3-(-1)}{2-1}(x-1)-1 = 4x-5$.
La droite de coefficient directeur 2 passant par le point de coordonnée $(2,1)$ a pour équation : $y = 2(x-2)+1 = 2x-3$.

---

11 $$\lim_{x\to-\infty}\left(1+x^2-2x^3\right) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2}{5x^2+x-7} = \frac{3}{5} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+4x^2-5}{x^2+3} = -\infty.$$

---

12 Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $$\ln\left(x^2\right) = \frac{\ln x}{2}+3 \iff 2\ln x - \frac{\ln x}{2} = 3 \iff \frac{3}{2}\ln x = 3 \iff x = \mathrm{e}^2.$$

---

13 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+x\ln x} = 0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1+x\ln x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-2x}} = 0.$$

---

14 Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$. Pour éviter d'échanger les rôles de sh et ch dans cette relation, on peut observer que le graphe de ch est situé au-dessus du graphe de sh.

15

1) Faux. Dérivée première : $x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$, dérivée seconde : $x \longmapsto \dfrac{2}{x^3}$.

2) Vrai. Si on note f la fonction $x \longmapsto \sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \sin(3x)$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x+2\pi) = \sin^2\left(\frac{x+2\pi}{2}\right) + \sin\big(3(x+2\pi)\big) = \sin^2\left(\frac{x}{2}+\pi\right) + \sin(3x+6\pi) = \left(-\sin\frac{x}{2}\right)^2 + \sin(3x) = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin(3x) = f(x).$$

3) Vrai, la fonction $x \longmapsto \mathrm{sh}\, x$ a pour dérivées d'ordre pair elle-même et pour dérivées d'ordre impair la fonction $x \longmapsto \mathrm{ch}\, x$.

4) La première partie de la proposition est vraie, mais pas la deuxième. En effet, si f et g sont deux fonctions paires définies par exemple sur $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$, mais en revanche, la somme de la fonction paire $x \longmapsto x^2$ et de la fonction impaire $x \longmapsto x$ n'est ni paire ni impaire comme on s'en convainc aisément.

5) Faux, la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est bornée entre 0 et 1 sur $\mathbb{R}$, mais son inverse $x \longmapsto x^2+1$ n'est clairement par bornée puisque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^2+1\right) = +\infty$.

6) Vrai. Si f et g sont deux fonctions bornées définies par exemple sur $\mathbb{R}$, on peut se donner deux réels K et K' tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\big|f(x)\big| \leqslant K$ et $\big|g(x)\big| \leqslant K'$, et donc : $\big|(fg)(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| \times \big|g(x)\big| \leqslant KK'$, ce qui montre bien que fg est bornée sur $\mathbb{R}$.

7) Faux, la fonction $x \longmapsto f(1-x)$ est définie sur $[-1,1]$ et non pas $[0,2]$ à cause de la composition par $x \longmapsto 1-x$. Il est bien vrai en revanche qu'elle monotone sur $[-1,1]$ comme composée de deux fonctions monotones.

8) Faux, par exemple la fonction $x \longmapsto e^{2x} = \left(e^x\right)^2$ n'est pas paire. On peut rendre vraie l'assertion proposée à condition de la modifier comme suit : « Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f\left(x^2\right)$ est paire. »

9) Faux pour deux raisons, d'une part parce que la formule correcte est : $\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$, mais aussi parce que le théorème de dérivabilité d'une réciproque requiert une hypothèse — il exige que f' NE S'ANNULE PAR SUR I. Pourquoi ? Les tangentes horizontales de f donnent à f^{-1} des tangentes verticales, qui sont le signe d'un défaut de dérivabilité.

10) Faux, car une fonction périodique n'est jamais bijective, elle prend une infinité de fois chacune de ses valeurs !

16

- **Première erreur :** La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 ! La fonction f proposée n'est donc dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$.
- **Deuxième erreur :** La seule erreur de calcul ensuite, c'est que le « $-$ » de la formule : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ a tout de suite été remplacé par un « + ».

---

17 Une seule erreur ! Le raisonnement sur la dérivabilité de $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est incorrect. Il est rédigé comme si $]1,+\infty[$ était le seul intervalle qui comptait alors qu'on a en réalité affaire à une COMPOSÉE. Correction :

> La fonction $x \longmapsto x^2-1$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ À VALEURS DANS $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable SUR $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{x^2-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$.

18

- **Première erreur :** La fonction $x \longmapsto x^\pi$ n'est pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier mais sur $\mathbb{R}_+^*$ seulement, donc la quantité $f(x) = \Big(\ln\left(e^x-2\right)\Big)^\pi$ est définie si et seulement si : $e^x - 2 > 1$, i.e. : $x \in \big]\ln 3, +\infty\big[$.
La preuve de dérivabilité proposée ensuite doit être modifiée en conséquence :

La foncion $x \longmapsto e^x - 2$ est dérivable sur $\left]\ln 3, +\infty\right[$ À VALEURS DANS $]1, +\infty[$ et $x \longmapsto \ln x$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ À VALEURS DANS $\mathbb{R}_+^*$, donc $x \longmapsto \ln\left(e^x - 2\right)$ est dérivable sur $\left]\ln 3, +\infty\right[$ par composition et À VALEURS DANS $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $x \longmapsto x^\pi$, enfin, étant dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable sur $\left]\ln 3, +\infty\right[$.

- **Deuxième erreur :** La dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln\left(e^x - 2\right)$ est $x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x - 2}$, donc pour tout $x \in \left]\ln 3, +\infty\right[$:

$$f'(x) = \pi \times \frac{e^x}{e^x - 2} \times \left(\ln\left(e^x - 2\right)\right)^{\pi - 1}.$$