Représentation matricielle des applications linéaires (je sais faire)

1 Préliminaires de calcul matriciel

✎ Je sais montrer qu'une matrice est ou n'est pas inversible et calculer son inverse le cas échéant.

1 Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

✎ Je sais calculer le rang d'une matrice.

2 Calculer le rang de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 6 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

✎ Je sais écrire la matrice d'une famille de vecteurs dans une base donnée. Inversement, je sais retrouver les vecteurs d'une famille définie par une matrice dans une base. Je ne confonds pas vecteurs et coordonnées en donnant le résultat.

3 Écrire la matrice de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right)$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4 Que valent les deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_2[X]$ pour lesquels : $\quad \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(P,Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$?

✎ Je sais utiliser dans les deux sens le lien entre l'inversibilité de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{X})$ et le fait que $\mathscr{X}$ soit une base.

5 Montrer matriciellement que la famille $\left(2X^2-1, X^2-X+2, 3X+4\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3 Matrice d'une application linéaire dans des bases

✎ Je sais écrire la matrice d'une application linéaire dans des bases données.

6 Écrire la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire $P \longmapsto \big(P(1)-P'(1), P(2)\big)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^2$.

✎ Je sais calculer matriciellement les coordonnées de l'image $f(x)$ d'un vecteur x par une application linéaire f. Je sais retrouver ensuite le vecteur $f(x)$ lui-même sans confondre le vecteur $f(x)$ et ses coordonnées.

7 On note f l'application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques. Calculer $f\big(3X^3 - X + 2\big)$.

✎ Je sais déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire définie matriciellement. Je ne confonds pas vecteurs et coordonnées en donnant le résultat.

8 Déterminer le noyau et l'image de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

✎ Je sais traduire une relation linéaire sur les colonnes en un vecteur du noyau.

9 Trouver à l'œil nu un vecteur non nul dans le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

✎ Je sais calculer la matrice d'une composée dans des bases et, le cas échéant, d'une réciproque.

10 On note f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_1[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et calculer la matrice de $g^{-1} \circ f$ dans les bases canoniques.

✎ Je sais interpréter, pour un endomorphisme dans une base donnée, le fait qu'il ait une matrice par blocs $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ en termes de stabilité d'un certain sous-espace vectoriel.

11 On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ de matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Proposer deux exemples de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_4[X]$ stables par f.

✎ Je sais calculer la trace d'un endomorphisme.

12 Calculer la trace de l'endomorphisme $M \longmapsto {}^t M \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

4 Changements de bases, équivalence et similitude

✎ Je sais écrire les deux formules de changement de bases sans les confondre.

✎ Je sais que l'équivalence de deux matrices traduit juste le fait qu'on est passé de l'une à l'autre par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

✎ Je sais que l'équivalence de deux matrices traduit juste le fait qu'elles ont même rang. Sur le terrain des applications linéaires, je sais qu'on peut ramener matriciellement toute application linéaire à une matrice J_r par un choix de deux bases a priori sans rapport l'une avec l'autre au départ et à l'arrivée.

✎ Je sais que le rang est invariant par transposition et décroissant par extraction.

✎ Je sais distinguer les définitions de l'équivalence et de la similitude de deux matrices.

✎ Pour un endomorphisme f et deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, je sais que les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont semblables. Inversement, je sais que deux matrices A et B sont semblables si et seulement si B est la matrice de l'application linéaire canoniquement associée à A dans une certaine base.

✎ Je sais que deux matrices semblables ont même trace et que, du coup, deux matrices de traces différentes ne le sont pas.

✎ Je sais montrer que deux matrices voisines sont semblables par un changement de base simple du type « permutation de vecteurs ».

13 Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ sont semblables.

5 Introduction à la diagonalisation

✎ Je sais écrire la matrice d'un projecteur et d'une symétrie dans une base adaptée aux deux sous-espaces vectoriels qui les définissent.

✎ Je sais résoudre un système à paramètre du type « $AX = \lambda X$ » pour trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice carrée A. Je sais que les distinctions qu'il faut faire sur λ pour avancer apparaissent quand je peux factoriser sur une ligne par un même facteur « $\lambda - \ldots$ ».

14 On pose : $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. Résoudre pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.

✎ Je sais que la matrice d'un endomorphisme dans une base de vecteurs propres est diagonale.

✎ Je sais qu'en diagonalisant une matrice carrée, on peut facilement calculer ses puissances.

6 CORRECTION DES EXERCICES

1 $$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

---

2 $$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 0 & 6 & 6 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 4.$$

---

3 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

4 $P = 3X^2 + 2X + 1$ et $Q = X^2 + X$.

---

5 Il s'agit de montrer que la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible — par exemple en montrant que son rang vaut 3.

---

6 $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

---

7 $f\left(3X^3 - X + 2\right) = 3X^2 + 7X + 1.$

---

8 Noyau : $\operatorname{Vect}\left(X^2 - 2X - 3\right)$. Image : $\operatorname{Vect}\left(1 - X, X^2 + 2X\right)$.

---

9 $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \text{donc :} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

---

10 Matrice de g^{-1} : $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, Matrice de $g^{-1} \circ f$: $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

---

11 $\operatorname{Vect}(1, X)$ et $\operatorname{Vect}\left(X^4\right)$.

---

12 Matrice de l'endomorphisme dans la base canonique : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Trace : 2.

---

13 Si on note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$, alors : $\operatorname{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Mat}_{(e_2,e_1,e_3)}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, donc en effet les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ sont semblables.

14 Ensemble des solutions pour $\lambda = 1$: $\mathrm{Vect}\Big((-3,0,1),(2,1,0)\Big)$. Ensemble des solutions pour $\lambda = 2$: $\mathrm{Vect}\Big((-3,1,2)\Big)$.
Ensemble des solutions pour $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \Big\{1,2\Big\}$: $\Big\{(0,0,0)\Big\}$.