Rudiments de logique et vocabulaire ensembliste (je sais faire)

1 Connecteurs logiques et quantificateurs

✎ Je sais nier une conjonction « et » et une disjonction « ou ».

✎ Je sais écrire la réciproque et la contraposée d'une implication.

1 Étant données deux propositions p et q, est-il vrai que la proposition : $p \Longleftrightarrow q$ est équivalente à la proposition :

$$(p \Longrightarrow q) \quad \text{et} \quad \big(\text{non } q \Longrightarrow \text{non } p\big) \quad ?$$

2 Étant données deux propositions p et q, quand on dit que q est une condition nécessaire de p, affirme-t-on que : $p \Longrightarrow q$ ou que : $q \Longrightarrow p$? Même question avec « condition suffisante » à la place de « condition nécessaire ».

✎ Je sais écrire l'implication : $p \Longrightarrow q$ et sa négation à l'aide des connecteurs « et » et « ou ». En particulier, je sais que la négation de l'implication : $p \Longrightarrow q$ n'est ni : $\text{non } p \Longrightarrow \text{non } q$, ni : $\text{non } q \Longrightarrow \text{non } p$.

✎ Je sais nier les quantificateurs « $\forall$ » et « $\exists$ », et les permuter quand c'est possible.

3 Montrer que la proposition suivante est fausse : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, k \in \mathbb{N}/ \quad n = k^2 + 1.$

✎ Je sais quelle rédaction adopter pour montrer une disjonction « ou », une implication ou une équivalence — chapitre transversal « Raisonner, rédiger ».

4 Montrer que tout entier naturel est la somme de trois carrés d'entiers naturels ou bien est supérieur ou égal à 7.

5 Montrer que pour tous $a, b, c \in \mathbb{Z}$: $a + b + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad \big(a \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad b \leqslant 0 \quad \text{ou} \quad c \leqslant 0\big).$

2 Vocabulaire ensembliste

✎ Je sais écrire en langage mathématique un ensemble décrit en français.

6 Écrire en langage mathématique l'ensemble des réels dont le logarithme est un entier, puis l'ensemble des entiers naturels qui sont le produit d'une factorielle et d'un entier naturel impair.

7 Décrire in extenso les ensembles : $\left\{2^k k\right\}_{1\leqslant k\leqslant 4}$ et $\left\{x\in\mathbb{R}/\quad \exists\, a,b\in [\![1,2]\!]/\quad x=\dfrac{a}{a+b}\right\}$.

✎ Je sais quelle rédaction adopter pour montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles — chapitre transversal « Raisonner, rédiger ».

8 Montrer l'inclusion : $\left\{\left(k,k^2\right)\right\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\quad x\leqslant y\right\}$.

✎ Je sais distinguer appartenance et inclusion et je sais que les propositions : $A\subset E$ et : $A\in\mathscr{P}(E)$ sont équivalentes.

9 Compléter par les symboles « $\in$ » ou « $\subset$ » quand c'est possible : $3\cdots\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}\cdots\mathbb{R}$, $\{3\}\cdots\{\mathbb{R}\}$, $\{2\}\cdots\mathbb{N}$, $0\cdots\mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\{\mathbb{N}\}\cdots\mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $\{1,4\}\cdots\mathscr{P}(\mathbb{Z})$.

10 Soient E un ensemble, $x\in E$, A et B deux parties de E et $\left\{A_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ensemble de parties de E. Écrire avec des connecteurs logiques les propositions : $x\in A\cap B$, $x\in A\cup B$, $x\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $x\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

3 Correction des exercices

1 Non. La proposition : $p \Longleftrightarrow q$ est équivalente à la proposition « implication + réciproque » : $(p \Longrightarrow q)$ et $(q \Longrightarrow p)$, donc aussi à la proposition « implication + contraposée de la réciproque » : $(p \Longrightarrow q)$ et $\big(\text{non } p \Longrightarrow \text{non } q\big)$, laquelle n'est pas équivalente à la proposition de l'énoncé.

---

2 Dire que q est une condition nécessire de p, c'est dire que quand p est vraie, q l'est nécessairement, autrement dit que : $p \Longrightarrow q$. Dire que q est une condition suffisante de p, c'est dire qu'il suffit que q soit vraie pour que p le soit, autrement dit que : $q \Longrightarrow p$.

---

3 Négation : $\exists\, n \in \mathbb{N}/ \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad n \neq k^2+1$. Il suffit de poser : $n = 0$. Il est alors bien vrai que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $k^2+1 \geqslant 1 > n$, donc : $n \neq k^2+1$.

---

4 On rappelle que pour montrer une disjonction : p ou q, on suppose que p est fausse et on montre que q est alors forcément vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Faisons l'hypothèse que n n'est pas supérieur ou égal à 7, i.e. que : $n \leqslant 6$. Il s'agit de montrer qu'alors n est la somme de trois carrés d'entiers naturels. Or si $n = 0$: $n = 0^2+0^2+0^2$. Si $n = 1$: $n = 1^2+0^2+0^2$. Si $n = 2$: $n = 1^2+1^2+0^2$. Si $n = 3$: ... Si $n = 6$: $n = 2^2+1^2+1^2$. Dans tous les cas possibles, n est bien la somme de trois carrés d'entiers naturels.

---

5 On peut raisonner par contraposition et montrer l'implication : $\big(a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0 \quad \text{et} \quad c > 0\big) \quad \Longrightarrow \quad a+b+c \neq 0$, qui est évidente.

---

6 $\big\{x \in \mathbb{R}/ \quad \ln x \in \mathbb{Z}\big\}$, puis : $\big\{n \in \mathbb{N}/ \quad \exists\, a, b \in \mathbb{N}/ \quad n = a!\,(2b+1)\big\} = \big\{a!\,(2b+1)\big\}_{a,b \in \mathbb{N}}$.

---

7 $\big\{2^k k\big\}_{1 \leqslant k \leqslant 4} = \big\{2, 8, 24, 64\big\}$ et $\left\{x \in \mathbb{R}/ \quad \exists\, a, b \in [\![1,2]\!]/ \quad x = \dfrac{a}{a+b}\right\} = \left\{\dfrac{1}{1+1}, \dfrac{1}{1+2}, \dfrac{2}{2+1}, \dfrac{2}{2+2}\right\} = \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right\}$.

---

8 On rappelle que pour montrer une inclusion : $E \subset F$, on part d'un élément quelconque de E et on montre qu'il est forcément dans F.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que : $\big(k, k^2\big) \in \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/ \quad x \leqslant y\big\}$, autrement dit que : $k \leqslant k^2$. Or c'est vrai car si $k = 0$: $k = 0 \leqslant 0 = k^2$, et si $k \geqslant 1$: $k^2 - k = k(k-1) \geqslant 0$.

---

9 $3 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $\{3\} \cancel{\cdots} \{\mathbb{R}\}$, $\{2\} \subset \mathbb{N}$, $0 \cancel{\cdots} \mathscr{P}(\mathbb{N})$, $\{\mathbb{N}\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$ et $\{1,4\} \in \mathscr{P}(\mathbb{Z})$.

---

10 D'abord ! $x \in A \cap B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \quad \text{et} \quad x \in B$. Ensuite : $x \in A \cup B \quad \Longleftrightarrow \quad x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B$. Enfin :

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \Longleftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in A_n \qquad \text{et :} \qquad x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N}/ \quad x \in A_n.$$
