Sommes, produits, coefficients binomiaux (je sais faire)

1 Sommes

✎ Je sais, quand je suis perdu face à une somme, que cela peut m'aider de la développer in extenso. En particulier, je sais ce qui m'est permis et ce qui m'est interdit avec les sommes $\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$, $\sum_{k=0}^{n} \lambda a_k$ et $\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)^p$.

✎ Je sais que la somme $\sum_{k=0}^{n} z_k$ dépend de n mais pas de k, et que la lettre k pourrait être remplacée par n'importe quelle lettre différente de n.

✎ Je sais écrire le produit de deux sommes comme une somme double.

1 Écrire comme une somme double le produit $\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \times \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

✎ Je sais effectuer un changement d'indice dans une somme.

2 Effectuer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ le changement d'indice $j = i+1$ dans la somme $\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{i}$.

3 Expliquer pourquoi le changement d'indice $j = i^2$ est incorrectement mené dans l'égalité $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{j=1}^{n^2} j$ pour $n \geqslant 2$.

✎ Je sais reconnaître une simplification télescopique et la mener à bien de tête.

4 Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{2^{k+1}} - \frac{k}{2^k}\right)$ et $\sum_{k=n}^{n^2-1} \left(\frac{\ln k}{k} - \frac{\ln(k+1)}{k+1}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

✎ Je sais écrire les sommes $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} z_{ij}$, $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} z_{ij}$ et $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} z_{ij}$ comme un emboîtement de deux sommes.

✎ Je sais, quand je suis perdu devant une expression $\sum_{i=\cdots}^{\cdots} \sum_{j=\cdots}^{\cdots} z_{ij}$, que je peux essayer de permuter les $\sum$.

5 Simplifier $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

✎ Je sais développer $\left(\sum_{k=1}^{n} z_k\right)^2$.

✎ Je sais simplifier les sommes $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

✎ Je sais simplifier les sommes géométriques $\sum_{k=m}^{n} x^k$ en n'oubliant ni le premier terme, ni le cas $x = 1$.

✎ Je sais factoriser $a^n - b^n$ par $a - b$ et je ne confonds pas cette factorisation avec la formule du binôme.

6 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Factoriser rapidement par $a-b$ les expressions a^3-b^3, a^4-b^4 et a^5-b^5 sans jamais écrire aucun symbole $\sum$.

2 Coefficients binomiaux

✎ Je sais par cœur les valeurs de $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.

7 Comment expliquer les égalités $\binom{n}{0} = \binom{n}{n}$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$?

✎ Je sais écrire le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ avec des factorielles, ainsi que sous la forme $\dfrac{\text{« un produit d'entiers »}}{k!}$.

✎ Je sais écrire rapidement le tableau de Pascal ainsi que la formule de Pascal, et je sais que le tableau de Pascal est le seul moyen raisonnable de calcul des coefficients binomiaux.

✎ Je sais développer $(a+b)^n$ grâce à la formule du binôme et je ne confonds pas ce développement avec la factorisation de $a^n - b^n$.

8 Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Développer rapidement les expressions $(a+b)^3$, $(a+b)^4$ et $(a+b)^5$ sans jamais écrire aucun symbole $\sum$ ni aucun symbole de coefficient binomial.

3 Vrai ou faux ?

9 Vrai ou faux ? Justifier.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$.

2) Pour tous $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x}{x-1}\left(x^n - 1\right)$.

3) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$: $\displaystyle a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k} a^k b^{n-k-1}$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(k+2) = n!\,(n+1)!$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) \overset{l=k+n}{=} \prod_{l=n+1}^{2n}\frac{l}{n} = \frac{(2n)!}{n^n n!}$.

6) Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\binom{2n+2}{n+1} = 2\binom{2n+1}{n+1}$.

4 Je sais repérer et corriger une erreur

Corriger, partout où c'est nécessaire, le calcul ou raisonnement suivant.

10 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(2^k + 2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} 2^k\right) + 2 = \frac{2^n - 1}{2-1} + 2 = 2^n + 1.$

11 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k = \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\sum_{k=1}^{n} k} = (n!)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$

12 Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}(i+2j) = \sum_{i=0}^{n} i + 2\sum_{j=0}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} + 2\times\frac{n(n+1)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}.$

13 Pour tout $n \geqslant 4$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(4k^2\right) = \left(\prod_{k=1}^{n}(2k)\right)^2 = \left((2n)!\right)^2 = 4\times n!^2.$

14 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i = \sum_{i=1}^{j}\sum_{j=i}^{n} i = \sum_{i=1}^{j}\left(i\sum_{j=i}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{j} i(n-i) = n\sum_{i=1}^{j} i - \sum_{i=1}^{j} i^2$$
$$= n\,\frac{j(j+1)}{2} - \frac{j(j+1)(2j+1)}{6} = \frac{j(j+1)(3n-2j-1)}{6}.$$

15 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n}\left(3^k k\right) = \prod_{k=1}^{2n} 3^k \prod_{k=1}^{2n} k = \frac{3^{2n}-1}{3-1}\times(2n)! = \left(9^n - 1\right) n!.$

5 Correction des exercices

1 Par exemple : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\sqrt{\frac{i}{j}}.$

Il serait en revanche tout à fait faux d'écrire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\times\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\ \times\ \sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}1=n.$

---

2 $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}\overset{j=i+1}{=}\sum_{j=n+2}^{2n+1}\frac{1}{j-1}.$

---

3 Un changement d'indice modifie l'aspect des termes sommés, mais pas leur nombre. Dans l'exemple proposé, on somme n termes à gauche et n^2 à droite.

---

4 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{2^{k+1}}-\frac{k}{2^k}\right)=\frac{n}{2^n}-\frac{0}{2^0}=\frac{n}{2^n}$ et $\displaystyle\sum_{k=n}^{n^2-1}\left(\frac{\ln k}{k}-\frac{\ln(k+1)}{k+1}\right)=\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\left(n^2\right)}{n^2}=\frac{(n-2)\ln n}{n^2}.$

---

5 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{1}{j}=\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j}1=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times j=\sum_{j=1}^{n}1=n.$

---

6 $a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$, $a^4-b^4=(a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)$ et $a^5-b^5=(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)$.

---

7 Formule de symétrie ! À connaître, bien sûr.

---

8 On écrit dans un coin le tableau de Pascal pour calculer les coefficients binomiaux requis.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\qquad (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$
$$\text{et}\qquad (a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

9

1) Vrai, il suffit de remplacer tous les « n » par des « $n-1$ » dans la formule du cours.

2) Faux pour $x=1$, vrai sinon : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x^k=x\times\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{x}{x-1}\left(x^n-1\right).$

3) Faux, il faut supprimer le coefficient binomial.

4) Faux : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}k(k+2)=\prod_{k=1}^{n}k\prod_{k=1}^{n}(k+2)=n!\times\frac{(n+2)!}{2}=\frac{n!\,(n+1)!}{2}.$

5) Vrai : $\displaystyle 1+\frac{k}{n}=1+\frac{l-n}{n}=\frac{l}{n}.$

6) Faux : $\displaystyle\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$

7) Vrai : $\displaystyle\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2}=\frac{(2n+2)\times(2n+1)!}{(n+1)\times n!(n+1)!}=2\times\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}=2\binom{2n+1}{n+1}.$

Autre preuve plus courte : $\displaystyle\binom{2n+2}{n+1}\overset{\text{Capitaine}}{=}\frac{2n+2}{n+1}\binom{2n+1}{n}=2\binom{2n+1}{n}\overset{\text{Symétrie}}{=}2\binom{2n+1}{n+1}.$

10

- **Première erreur :** $\displaystyle\sum_{k=1}^n \left(2^k+2\right) = \sum_{k=1}^n 2^k + \sum_{k=1}^n 2 = \sum_{k=1}^n 2^k + 2n.$
- **Deuxième erreur :** $\displaystyle\sum_{k=1}^n 2^k = 2 \times \frac{2^n-1}{2-1}$ à cause du premier terme.

11

- **Première erreur** $1^1 \times 2^2 \times \ldots \times n^n \neq (1 \times 2 \times \ldots \times n)^{1+2+\ldots+n}.$
- **Deuxième erreur :** $\displaystyle\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \neq \frac{n(n-1)}{2}.$

---

12 Une erreur dans la première égalité : $\displaystyle\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} (i+2j) = \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} i + 2\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} j = \sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n i + 2\sum_{i=0}^n\sum_{j=0}^n j \quad \left(\neq \sum_{i=0}^n i + 2\sum_{j=0}^n j\right)$

$$= \sum_{i=0}^n (n+1)\,i + 2\sum_{i=0}^n \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)^2}{2} + 2 \times \frac{n(n+1)^2}{2} = \frac{3n(n+1)^2}{2}.$$

13

- **Première erreur** $\displaystyle\prod_{k=1}^n (2k) = \prod_{k=1}^n 2 \times \prod_{k=1}^n k = 2^n n! \neq (2n)!.$
- **Deuxième erreur :** $(2n)! = 1 \times 2 \times \ldots \times (2n-1) \times (2n) \neq 2 \times \big(1 \times 2 \times \ldots \times n\big) = 2 \times n!.$

14

- **Première erreur :** ERREUR MAJEURE ! Le calcul proposé n'a en réalité pas le moindre sens, car dès la première égalité, la somme extérieure $\displaystyle\sum_{i=1}^j$ est incorrecte, il aurait fallu écrire $\displaystyle\sum_{i=1}^n$. C'est pour cela que le résultat final dépend de j alors que la somme initiale n'en dépend pas.
- **Deuxième erreur :** $\displaystyle\sum_{j=i}^n 1 = n-i\boxed{+1}.$

15

- **Première erreur :** La deuxième égalité relève d'une grosse confusion somme-produit, et en plus le premier terme de la somme géométrique a été oublié : $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n} 3^k \neq \sum_{k=1}^{2n} 3^k = 3 \times \frac{3^{2n}-1}{3-1}.$
- **Deuxième erreur :** $\displaystyle\frac{1 \times 2 \times \ldots \times n \times (n+1) \times \ldots \times (2n)}{2} = \frac{(2n)!}{2} \neq n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n.$
