Structure d'espace vectoriel (je sais faire)

1 Espaces vectoriels et combinaisons linéaires

✎ Je sais reconnaître rapidement de tête qu'une partie d'un espace vectoriel en est ou n'en est pas un sous-espace vectoriel.

1 De tête, les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

1) $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \quad P\left(X^2\right) = P(X)^2\right\}$. **2)** $\left\{(2x, x+3y+1, x-y) \mid \quad x, y \in \mathbb{R}\right\}$.

3) $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = u_{n+2} - u_n\right\}$. **4)** L'ensemble des fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

5) L'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. **6)** $\left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0\right\}$.

✎ Je connais la caractérisation des sous-espaces vectoriels.

2 Montrer que $\left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \quad f'(0) = f(1)\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

3 Dresser une liste de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels usuels, puis de sous-espaces vectoriels usuels de ces espaces vectoriels. Vous avez le droit d'avoir de la mémoire et/ou de l'imagination et de dépasser les 20 citations !

✎ Je sais définir et me représenter géométriquement la notion de sous-espace affine. Je sais analyser les sous-espaces affines définis par une équation linéaire grâce au principe « Solution particulière + solution générale de l'équation homogène ».

4 Montrer que $\left\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \quad P(X+1) = P(X) + 1\right\}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer une base de sa direction.

✎ Je sais montrer qu'une partie d'un espace vectoriel en est un sous-espace vectoriel en l'écrivant comme un Vect.

5 Écrire comme des Vect les ensembles suivants : **1)** $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad 2x - y + z + t = 0\right\}$.

2) $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \quad x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad x + y + 2z = 0\right\}$. **3)** $\left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \quad \mathrm{tr}(M) = 0\right\}$.

4) $\left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid \quad (X-1)\,P'(X+1) = 2\,P(X)\right\}$.

✎ Je sais quelles opérations on a le droit de faire subir à un Vect pour le transformer.

✎ Je sais que $\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $x_1, \ldots, x_n$ et utiliser ce fait pour montrer une inclusion ou une égalité de sous-espaces vectoriels.

6 Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E$. Montrer que :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Vect}\big(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n\big).$$

2 Familles de vecteurs

✎ Je sais déterminer une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel en l'écrivant comme un Vect.

✎ Je sais écrire avec des quantificateurs la définition d'une famille libre de vecteurs. Je sais que la liberté d'une famille infinie de vecteurs est équivalente à la liberté de chacune de ses sous-familles finies.

7 Montrer de deux manières différentes que la famille $\big((X+1)^2, (X+1)(X-1), (X-1)^2\big)$ est libre.

8 Montrer que la famille des fonctions $x \longmapsto x^\alpha$, α décrivant $\mathbb{R}$, est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$.

✎ Je sais que toute famille de polynômes échelonnée en degré est libre. Je sais démontrer matriciellement qu'une famille de polynômes $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ si : $\quad \deg(P_i) = i \quad$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$.

✎ Je sais décrire et exploiter les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$. Je sais que le mot « canonique » est réservé à ces seules bases.

9 Montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer les coordonnées de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

✎ Je sais déterminer une base d'un sous-espace vectoriel en commençant par l'écrire comme un Vect.

10 On note σ l'application qui associe à toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ la somme de ses coefficients.
Déterminer une base de $\left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid \quad M^\top = M - \sigma(M) I_2\right\}$.

✎ Je sais caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée à l'aide de la famille de ses lignes/colonnes.

3 Espaces vectoriels de dimension finie

✎ Je sais définir la notion d'espace vectoriel de dimension finie — sans base !

✎ Je sais décrire et appliquer l'algorithme de la base incomplète et l'appliquer aussi bien à la complétion d'une famille libre qu'à l'extraction d'une base à partir d'une famille génératrice.

11 Montrer que la famille $\left(X^2+1, X^2+X\right)$ est libre et la compléter en une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

12 Déterminer une base de $\mathrm{Vect}\big((1,2,-1), (2,-1,1), (1,7,-4), (3,1,0)\big)$.

✎ Je sais définir la notion de dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.

✎ Je connais la dimension des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}[X]$.

13 Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires à coefficients diagonaux tous nuls.

14 Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites 2-périodiques.

✎ Je sais caractériser la notion de base en dimension finie.

✎ Je sais qu'une matrice carrée et inversible si et seulement si elle possède un inverse à gauche ou à droite, si et seulement si le système homogène associé admet 0 pour unique solution.

✎ Je sais définir la notion de rang d'une famille de vecteurs et l'interpréter en termes d'indépendance linéaire.

✎ Je sais écrire la matrice d'une famille de vecteurs dans une base et m'en servir pour montrer que cette famille est une base.

15 Pour quelle(s) valeurs(s) du réel α la famille $\left(X^2+\alpha X+1, X+2, X^2-\alpha X+2\right)$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

✎ Je sais que toute matrice est égale à la matrice dans la base canonique de la famille de ses colonnes et je sais me l'expliquer.

16 En guise de bilan, faire une liste de stratégies diverses et variées qu'on peut envisager pour montrer qu'une famille de vecteurs est une base d'un espace vectoriel en dimension finie.

4 Sommes de deux sous-espaces vectoriels

✎ Je sais me représenter la somme de deux sous-espaces vectoriels en me représentant la situation générique d'un plan et d'une droite dans l'espace.

✎ Je sais construire une partie génératrice de la somme de deux sous-espaces vectoriels.

17 Proposer un exemple de sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E et de bases $\mathscr{F}$ de F et $\mathscr{G}$ de G dont la concaténation n'est pas une base de $F+G$.

✎ Je sais énoncer la formule de Grassmann.

✎ Je sais définir la notion de somme directe, puis la caractériser en termes d'intersection. Je sais calculer la dimension d'une somme directe de deux sous-espaces vectoriels de dimension finie.

✎ Je sais construire une base de la somme de deux sous-espaces vectoriels de dimension finie en somme directe.

18 L'espace vectoriel des suites réelles 2-périodiques et celui des suites réelles 3-périodiques sont-ils en somme directe ?

✎ Je sais définir la notion de supplémentarité et surtout, je sais la distinguer de celle de somme directe.

✎ Je sais démontrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires au moyen d'une preuve adaptée — notamment en écrivant un système d'équations, par analyse-synthèse ou par un argument de dimension.

19 On pose : $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}_3[X] \;\Big|\; P(1) = P'(1) = 0 \Big\}$. Montrer de plusieurs manières que : $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.

✎ Je sais déterminer un supplémentaire en dimension finie grâce à l'algorithme de la base incomplète.

20 Déterminer un supplémentaire de $\Big\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; x + 3y - z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y + t = 0 \Big\}$ dans $\mathbb{R}^4$.

5 Correction des exercices

1

1) Non à cause du carré de « $P(X)^2$ » — l'autre ne pose aucun problème.

2) Non à cause du vecteur nul, mais c'est tout de même un plan affine. **3)** Oui.

4) Oui notamment grâce à l'inégalité triangulaire. **5)** Oui. **6)** Non, pas stable par multiplication par -1.

---

2 En notant E l'ensemble étudié : $E \subset \mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et la fonction nulle appartient à E. Pour la stabilité par combinaison linéaire, pour toutes fonctions $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$: $(\lambda f + g)'(0) = \lambda f'(0) + g'(0) = \lambda f(1) + g(1) = (\lambda f + g)(1)$, donc : $\lambda f + g \in E$.

3 Nous connaissons déjà pas mal d'espaces vectoriels à ce stade :

— $\mathbb{K}^n$ bien sûr !

— $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et ses sous-espaces vectoriels classiques : ensemble des matrices symétriques (ou antisymétriques), ensemble des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures), ensemble des matrices diagonales...

— $\mathbb{K}[X]$ et ses sous-espaces vectoriels classiques : $\mathbb{K}_n[X]$, ensemble $P\mathbb{K}[X]$ des multiples d'un polynôme fixé P, ensemble des polynômes pairs (ou impairs)...

— $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et ses sous-espaces vectoriels classiques : ensemble des suites convergentes, ensemble des suites bornées, ensemble des suites p-périodiques pour un entier p fixé...

— $\mathbb{K}^D$ pour toute partie D de $\mathbb{R}$ et ses sous-espaces vectoriels classiques : $\mathscr{C}(D,\mathbb{K})$, $\mathscr{D}(D,\mathbb{K})$, $\mathscr{C}^1(D,\mathbb{K})$, ensemble des fonctions paires (ou impaires), ensemble des fonctions bornées...

— les espaces vectoriels produits,

— les espaces vectoriels d'applications à valeurs dans un espace vectoriel en général.

4 Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble étudié et posons : $E = \Big\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \ P(X+1) = P(X) \Big\}$.

- Montrons d'abord que E est un sous-espace vectoriel de E, et en prévision de la fin, déterminons-en une base. Pour tout $P \in E$, le polynôme $P - P(0)$ est 1-périodique, donc admet tout entier pour racine, donc est nul, donc : $P = P(0)$. Il en découle que E est l'ensemble des polynômes constants de $\mathbb{R}[X]$ — inclusion réciproque évidente. En d'autres termes : $E = \text{Vect}(1)$, donc E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, et comme le polynôme 1 est non nul, la famille (1) est une base de E.
- Le polynôme X est clairement élément de $\mathscr{E}$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$P \in \mathscr{E} \iff P(X+1) - P(X) = 1 \iff P(X+1) - P(X) = (X+1) - X$$
$$\iff P(X+1) - (X+1) = P(X) - X \circ (X) \iff P - X \in E \iff P \in X + E,$$

donc : $\mathscr{E} = X + E$. Conclusion : $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de $\mathbb{R}[X]$ de direction E.

5

1) En prenant y comme paramètre : $\Big\{ (x, 2x+z+t, z, t) \mid \ x, z, t \in \mathbb{R} \Big\} = \text{Vect}\Big((1,2,0,0), (0,1,1,0), (0,1,0,1) \Big)$, mais il y a bien d'autres réponses possibles !

2) Après échelonnement, en prenant y comme paramètre : $\Big\{ (3y, y, -2y) \mid \ y \in \mathbb{R} \Big\} = \text{Vect}\Big((3,1,-2) \Big)$. Ici, c'est la seule réponse possible à un facteur multiplicatif non nul près.

3) $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$. **4)** $\text{Vect}\big(X^2 - 1 \big)$.

---

6 On peut transformer si on veut l'un des deux Vect en l'autre par des substitutions pas à pas, mais on peut aussi procéder par double inclusion de la façon que voici.

— $\text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ est un sous-espace vectoriel et contient $x_1, \ldots, x_n$, donc aussi $x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n$. Conclusion : $\text{Vect}\big(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n \big) \subset \text{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

— Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$: $\quad x_k = x_n + \displaystyle\sum_{i=k}^{n-1} (x_i - x_{i+1})$, $\quad$ donc x_k appartient à $\mathrm{Vect}\big(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n\big)$.
Comme $\mathrm{Vect}\big(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n\big)$ est un sous-espace vectoriel de E, il en découle comme voulu que :
$$\mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n) \subset \mathrm{Vect}\big(x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots, x_{n-1} - x_n, x_n\big).$$

---

7 Simple identification ou bien évaluation en ± 1.

---

8 Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ avec : $\quad \alpha_1 < \ldots < \alpha_n$. $\quad$ Montrons que la famille $\big(x \longmapsto x^{\alpha_1}, \ldots, x \longmapsto x^{\alpha_n}\big)$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x > 0$: $\quad \lambda_1 x^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_n x^{\alpha_n} = 0$. $\quad$ Supposons par l'absurde que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ne sont pas tous nuls et notons p le plus grand indice $i \in [\![1, n]\!]$ pour lequel : $\quad \lambda_i \neq 0$. $\quad$ Pour tout $x > 0$: $\quad \lambda_1 x^{\alpha_1} + \ldots + \lambda_p x^{\alpha_p} = 0$, donc après division par x^{α_p} : $\quad \lambda_1 x^{\alpha_1 - \alpha_p} + \ldots + \lambda_{p-1} x^{\alpha_{p-1} - \alpha_p} + \lambda_p = 0$, $\quad$ donc après passage à la limite en $+\infty$: $\quad \lambda_p = 0$ — contradiction. Comme voulu : $\quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

---

9 Coordonnées $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$ — ça se voit sans calculs, d'ailleurs.

---

10 Notons E l'ensemble étudié. Pour tout $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$:
$$M \in E \quad \iff \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a+b+c+d & 0 \\ 0 & a+b+c+d \end{pmatrix} \quad \iff \quad b = c \quad \text{et} \quad a+b+c+d = 0,$$
donc : $\quad E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a-2b \end{pmatrix} \ \middle|\ a, b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right)$. $\quad$ Il découle de ces calculs que E est un sous-espace vectoriel de E engendré par les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Non colinéaires, ces deux matrices forment en fait une base de E.

---

11 En première approche, on a bien envie de montrer **D'ABORD** que la famille $\big(X^2 + 1, X^2 + X\big)$ est libre, **PUIS** d'appliquer l'algorithme de la base incomplète en lui adjoignant de proche en proche certains vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. C'est un peu long cependant et il vaut mieux démontrer une et une seule fois qu'une certaine famille bien chosie de 4 vecteurs du type $\big(X^2 + 1, X^2 + X, ???, ???\big)$ est libre. Comme : $\quad \dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, $\quad$ une telle famille est une base de $\mathbb{R}_4[X]$.

Ici, il paraît raisonnable de s'intéresser à la famille $\big(X^2 + 1, X^2 + X, X^2, X^3\big)$ — pourquoi raisonnable ? Sa matrice dans la base canonique $\big(1, X, X^2, x^3\big)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, triangulaire à coefficients diagonaux non nuls donc inversible.

Remarquez bien qu'on n'a pas eu besoin de montrer la liberté de la famille initiale $\big(X^2 + 1, X^2 + X\big)$, elle découle de la liberté des quatre vecteurs proposés.

---

12 Il s'agit seulement d'appliquer l'algorithme de la base incomplète. La famille $\big((1, 2, -1), (2, -1, 1)\big)$ est libre. La famille $\big((1, 2, -1), (2, -1, 1), (1, 7, -4)\big)$ est quant à elle liée, de même ensuite que la famille $\big((1, 2, -1), (2, -1, 1), (3, 1, 0)\big)$. Conclusion : $\big((1, 2, -1), (2, -1, 1)\big)$ est une base du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ étudié.

---

13 Dimension $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

14 Notons E l'ensemble étudié et $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les deux suites particulières 2-périodiques définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\quad a_0 = b_1 = 1 \quad$ et $\quad a_1 = b_0 = 0$. $\quad$ En d'autres termes : $\quad a = (1, 0, 1, 0, \ldots) \quad$ et $\quad b = (0, 1, 0, 1, \ldots)$. $\quad$ Ainsi, pour toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$: $\quad u = (u_0, u_1, u_0, u_1, \ldots) = u_0 a + u_1 b$, $\quad$ donc : $\quad E = \mathrm{Vect}(a, b)$. $\quad$ Il en découle que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qui plus est de dimension finie engendré par a et b. Il n'est pas dur ensuite de se convaincre que la famille (a, b) est libre. C'est donc une base de E et : $\quad \dim E = 2$.

15 Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$:
$$\mathrm{Mat}_{(1, X, X^2)}\big(X^2 + \alpha X + 1, X + 2, X^2 - \alpha X + 2\big) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ \alpha & 1 & -\alpha \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1-2\alpha & -3\alpha \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - \alpha L_1 \\ L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{matrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1-2\alpha & -3\alpha \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4\alpha + 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow (1-2\alpha) L_2 - 2 L_3.$$
La matrice de la famille étudiée dans la base canonique est donc inversible si et seulement si : $\quad 4\alpha + 1 \neq 0$. $\quad$ A fortiori, cette famille est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ si et seulement si : $\quad \alpha \neq -\dfrac{1}{4}$.

---

16 Quelle variété de techniques pour démontrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel en dimension finie !

— On peut revenir à la définition quantifiée des bases : $\forall x \in E, \quad \exists\,!\,(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n, \quad x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ en l'adaptant au contexte, en déduire un système linéaire et montrer qu'il possède une et une seule solution.

— On peut montrer séparément que la famille est libre et génératrice, mais c'est déconseillé dans les situations concrètes car trop long.

— On peut montrer que la famille est libre et observer qu'elle contient autant de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant.

— On peut montrer que la famille est génératrice et observer qu'elle contient autant de vecteurs que la dimension de l'espace ambiant.

— On peut enfin, et c'est souvent pratique, montrer que la matrice de la famille étudiée dans une base est inversible.

---

17 En notant (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $E = \mathbb{R}^3$, on peut poser par exemple : $F = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_2,e_3)$. Les familles (e_1,e_2) et (e_2,e_3) sont des bases respectives de F et G, mais leur concaténation (e_1,e_2,e_2,e_3) n'est bien sûr pas libre, donc n'est pas une base de $F+G = \mathrm{Vect}(e_1,e_2,e_3) = \mathbb{R}^3$.

---

18 Non car toute suite constante est à la fois 2-périodique et 3-périodique.

---

19 Je laisserai de côté certains détails ci-dessous pour mettre mieux en évidence le fond de l'affaire dans chaque preuve.

- **Première preuve :** $E = (X-1)^2\mathbb{R}_1[X]$, donc $\Big((X-1)^2,(X-1)^2X\Big)$ est une base de E, donc : $\dim E = 2$. Bien sûr : $\dim \mathbb{R}_1[X] = 2$ également, donc : $\dim E + \dim \mathbb{R}_1[X] = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. Il n'est pas dur ensuite de se convaindre que E et $\mathbb{R}_1[X]$ sont en somme directe en étudiant leur intersection. Conclusion : $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
- **Deuxième preuve :** $E = (X-1)^2\mathbb{R}_1[X]$, donc $\Big((X-1)^2,(X-1)^2X\Big)$ est une base de E, et bien sûr $(1,X)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$. Or la famille $\Big(1,X,(X-1)^2,(X-1)^2X\Big)$ est échelonnée en degré et constituée de 4 vecteurs, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$. A fortiori : $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}\Big((X-1)^2,(X-1)^2X\Big) \oplus \mathrm{Vect}(1,X) = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
- **Troisième preuve :** $E = (X-1)^2\mathbb{R}_1[X]$, or le théorème de la division euclidienne par $(X-1)^2$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ montre que : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \quad \exists\,!\,(Q,R) \in \mathbb{R}_1[X]^2, \quad P = (X-1)^2Q+R$. C'est exactement dire que : $\mathbb{R}_3[X] = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.
- **Quatrième preuve :** En lien avec la formule de Taylor polynomiale, la famille $\Big(1,X-1,(X-1)^2,(X-1)^3\Big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, donc : $\mathbb{R}_3[X] = \mathrm{Vect}\Big((X-1)^2,(X-1)^3\Big) \oplus \mathrm{Vect}(1,X-1)$, or : $\mathrm{Vect}(1,X-1) = \mathbb{R}_1[X]$, donc : $\mathbb{R}_3[X] = (X-1)^2\mathbb{R}_1[X] \oplus \mathbb{R}_1[X] = E \oplus \mathbb{R}_1[X]$.

---

20 En notant E l'ensemble étudié : $E = \Big\{(x,y,x+3y,-2x+y) \;\Big|\; x,y \in \mathbb{R}\Big\} = \mathrm{Vect}\Big((1,0,1,-2),(0,1,3,1)\Big)$. Cette égalité montre que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Constituée de deux vecteurs linéairement indépendants, la famille $\Big((1,0,1,-2),(0,1,3,1)\Big)$ est en outre une base de E que nous allons compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ pour construire un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$. Cette complétion peut être faite à l'aide d'une application stricte de l'algorithme de la base incomplète à partir des vecteurs de la base canonique, mais on peut ici aller plus vite en exploitant la position des zéros. Nous allons montrer en l'occurrence que la famille $\Big((1,0,1,-2),(0,1,3,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Il en découlera que $\mathrm{Vect}\Big((0,0,1,0),(0,0,0,1)\Big)$ est un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$ — attention de ne pas oublier le Vect !

En notant $\mathscr{B}_4$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_4}\Big((1,0,1,-2),(0,1,3,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\Big) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls et c'est fini.

De multiples réponses différentes sont possibles suivant la paramétrisation de E choisie, le stock de vecteurs choisis pour effectuer la complétion et l'ordre dans lequel ils sont donnés.
