




TECHNIQUES ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL INTÉGRAL (JE SAIS FAIRE)

 Je sais qu'on ne dit pas « LA primitive » mais « une primitive ».


 Je sais donner instantanément les primitives des fonctions : $x \mapsto e^x$, $x \mapsto \ln x$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \neq -1$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \tan x$, $x \mapsto \operatorname{sh} x$, $x \mapsto \operatorname{ch} x$, $x \mapsto \operatorname{th} x$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

 Je sais que la primitivation est un problème difficile en général — on peut savoir primitiver f et g sans savoir primitiver fg , $\frac{f}{g}$ et $g \circ f$.

1 Calculer une primitive des fonctions : $x \mapsto \sin(3x+2)$, $x \mapsto \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \frac{1}{\tan x}$ et $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$.

 Je sais primitiver les fonctions $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$ pour lesquelles $b^2-4ac < 0$.

2 Calculer une primitive des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2+4}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2+x+1}$.

 Je sais primitiver les fonctions $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.

3 Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto e^{2x} \sin(5x)$.

 Je sais primitiver les fonctions du genre : $x \mapsto \sin^4 x$, $x \mapsto \sin^3 x \cos^5 x$, $x \mapsto \sin^2 x \cos(2x) \dots$


4 Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \cos^2 x \sin^4 x$.

 Je sais primitiver les fractions rationnelles.

5 Calculer une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)(x-1)}$.

 Je sais énoncer dans son intégralité le théorème fondamental du calcul intégral.

6 Dériver les fonctions : $x \mapsto \int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt$, $x \mapsto \int_0^{e^x} \sin \sqrt{t} dt$ et $x \mapsto \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

 Je sais utiliser la notation « $\int^x f(t) dt$ » sans borne inférieure.

 Je sais ce qu'est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

 Je sais effectuer rapidement une intégration par parties, y compris pour des intégrales sans bornes.

7 Calculer une primitive des fonctions $x \mapsto x \ln x$ et $x \mapsto x^2 \operatorname{Arctan} x$.

 Je sais énoncer la formule de changement de variable et la mettre en œuvre rapidement, y compris pour des intégrales sans bornes.

8 Effectuer successivement dans l'intégrale $\int_1^2 \frac{\sin t}{t^2 + t + 1} dt$ les changements de variable $x = t^2$, puis $u = \ln x$.

1 CORRECTION DES EXERCICES

$$\textcircled{1} \quad \int \sin(3x+2) \, dx = -\frac{\cos(3x+2)}{3}, \quad \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \sin \sqrt{x}, \quad \int \frac{dx}{\tan x} = \ln |\sin x| \quad \text{et} \quad \int \frac{e^x}{e^x+1} \, dx = \ln(e^x+1).$$

$$\textcircled{2} \quad \int \frac{dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad \int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$$

$$\textcircled{3} \quad \int e^{2x} \sin(5x) \, dx = \frac{e^{2x}}{29} (2 \sin(5x) - 5 \cos(5x)).$$

$$\textcircled{4} \quad \int \cos^2 x \sin^4 x \, dx = \frac{x}{16} - \frac{\sin(2x)}{64} - \frac{\sin(4x)}{64} + \frac{\sin(6x)}{192}.$$

$$\textcircled{5} \quad \text{Après calcul de la décomposition en éléments simples : } \frac{X}{(X^2+1)(X-1)} = 0 + \frac{1-X}{2(X^2+1)} + \frac{1}{2(X-1)}.$$

$$\text{Par conséquent : } \int \frac{x \, dx}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{\ln|x-1|}{2}.$$

$$\textcircled{6} \quad \text{Pour tout } x > -1 : \quad f'(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} : \quad g'(x) = e^x \times \sin \sqrt{e^x} = e^x \sin e^{\frac{x}{2}}.$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^* : \quad h'(x) = 2 \times \frac{e^{2x}}{2x} - \frac{e^x}{x} = \frac{e^x(e^x-1)}{x}.$$

$$\textcircled{7} \quad \int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \quad \text{et} \quad \int x^2 \operatorname{Arctan} x \, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{Arctan} x - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \ln(x^2+1).$$

$$\textcircled{8} \quad \int_1^2 \frac{\sin t}{t^2+t+1} \, dt \stackrel{x=t^2}{=} \int_1^4 \frac{\sin \sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \times \frac{dx}{2\sqrt{x}} \stackrel{u=\ln x}{=} \int_0^{2\ln 2} \frac{\sin e^{\frac{u}{2}}}{e^u + e^{\frac{u}{2}} + 1} \times \frac{1}{2e^{\frac{u}{2}}} \times e^u \, du = \frac{1}{2} \int_0^{2\ln 2} \frac{e^{\frac{u}{2}} \sin e^{\frac{u}{2}}}{e^u + e^{\frac{u}{2}} + 1} \, du.$$