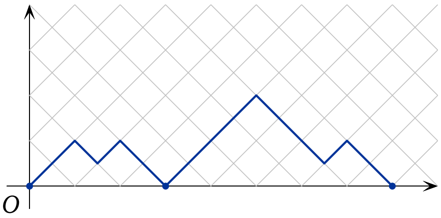
À la rencontre de Dyck, Stirling et Cauchy

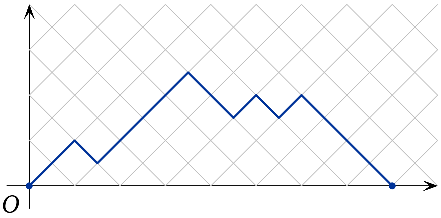
Les trois parties de ce devoir sont indépendantes.

1 Chemins de Dyck

La chenille Becky se promène le long d'un grillage plan infini. Initialement positionnée en O, elle effectue $2n$ déplacements nord-est ($\nearrow$) ou sud-est ($\searrow$) en restant à tout instant au-dessus de l'axe des abscisses et en y terminant sa promenade.

De tels chemins sont appelés des *chemins de Dyck*. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note C_n le nombre de chemins de Dyck de longueur $2n$ ainsi définis — ce nombre est aussi appelé le $n^{\text{ème}}$ *nombre de Catalan*.





1) a) Calculer C_0, C_1 et C_2.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe exactement C_n chemins de Dyck de longueur $2n+2$ qui ne touchent l'axe des abscisses qu'en leurs extrémités.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad C_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}$.

2) On note à présent f la fonction $x \longmapsto \dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{4}\right] \setminus \{0\}$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de coefficients associée : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mathrm{o}\big(x^n\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{4}\right] \setminus \{0\}$: $\quad x f(x)^2 = f(x) - 1$.

c) En déduire une expression simplifiée de la somme : $\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) En déduire finalement une expression explicite de C_n en fonction pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Nombres de Stirling de deuxième espèce

Pour tout ensemble non vide X et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle *partition de X en p parties* ou *p-partition de X* tout ensemble $\big\{X_1, \ldots, X_p\big\}$ de parties non vides de X pour lesquelles : $\quad X = X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_p \quad$ — réunion disjointe.

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note alors $\left\{ {n \atop p} \right\}$ le nombre de p-partitions de $[\![1,n]\!]$. On pose en outre : $\left\{ {n \atop 0} \right\} = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ces nombres sont appelés les *nombres de Stirling de deuxième espèce*.

1) Calculer $\left\{ {n \atop 1} \right\}$, $\left\{ {n \atop n} \right\}$ et $\left\{ {n \atop n-1} \right\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis $\left\{ {n \atop 2} \right\}$ pour tout $n \geqslant 2$.

2) a) Montrer par un raisonnement combinatoire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1,n]\!]$: $\left\{ {n+1 \atop p} \right\} = \left\{ {n \atop p-1} \right\} + p\left\{ {n \atop p} \right\}$.

b) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0,n]\!]$: $\quad \left\{ {n \atop p} \right\} \geqslant p^{n-p}$.

3) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note à présent $X^{\underline{k}}$ le polynôme $X(X-1)\dots(X-k+1)$.

a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\quad X \times X^{\underline{k}} = X^{\underline{k+1}} + kX^{\underline{k}}$.

b) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad X^n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} X^{\underline{k}}$.

c) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$: $\quad \left\{ {n \atop p} \right\} \leqslant \frac{p^n}{p!}$.

4) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0, n]\!]$.

a) Montrer qu'il existe $\left\{ {n \atop p} \right\} p!$ surjections de $[\![1, n]\!]$ sur $[\![1, p]\!]$. Retrouver ainsi l'inégalité de la question **3)c)**.

b) Que représente p^{n-p} d'un point de vue combinatoire ? En déduire une preuve combinatoire de l'inégalité de la question **2)b)**.

3 Théorème de Cauchy

La dernière partie de ce devoir est facultative. On souhaite établir le résultat suivant.

Théorème (Théorème de Cauchy) Soient $p \in \mathbb{P}$ et G un groupe fini d'élément neutre e dont le cardinal est divisible par p. Alors G contient un élément $g \neq e$ pour lequel : $\quad g^p = e$. $\quad$ Un tel élément est dit *d'ordre* p.

On note X l'ensemble des fonctions p-périodiques $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ pour lesquelles : $\quad f(0)f(1)\dots f(p-1) = e \quad$ — attention, il s'agit d'un produit dans le groupe G. En outre, pour toute fonction $f : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on note $f_{[n]}$ la fonction $x \longmapsto f(x+n)$.

1) Montrer l'égalité : $\quad |X| = |G|^{p-1}$.

2) **a)** Montrer que pour tous $f \in X$ et $n \in \mathbb{Z}$: $\quad f_{[n]} \in X$.

b) Montrer que pour tout $f \in X$, si : $\quad f_{[1]} = f, \quad$ alors f est constante.

c) Montrer que pour tous $f \in X$ et $n \in \mathbb{Z}$ premier à p, si : $\quad f_{[n]} = f, \quad$ alors f est constante.

d) En déduire que pour tous $f \in X$ et $m, n \in \mathbb{Z}$, si : $\quad f_{[m]} = f_{[n]} \quad$ et $\quad m \not\equiv n\ [p], \quad$ alors f est constante.

3) On définit une relation $\sim$ sur X de la façon suivante — pour tous $f, g \in X$: $\quad f \sim g \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{Z}/ \quad g = f_{[n]}$.

a) Montrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur X.

b) Montrer que pour tout $f \in X$, la classe d'équivalence de f pour $\sim$ est de cardinal 1 ou p.

4) Démontrer le théorème de Cauchy.